

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА**

# **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**Конспект лекцій і завдання  
для контрольних і самостійних робіт**

*(для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямками  
6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка»,  
6.050701 «Електротехніка та електротехнології»,  
6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)»,  
6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)»,  
6.170202 «Охорона праці»  
та слухачів другої вищої освіти спеціальностей:  
7.05070203 «Електричний транспорт»,  
7.06010103 «Міське будівництво та господарство»,  
7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво»,  
7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція»)*

**Харків  
ХНУМГ  
2014**

**Теоретична механіка:** Конспект лекцій і завдання для контрольних і самостійних робіт (для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці» та слухачів другої вищої освіти спеціальностей: 7.05070203 «Електричний транспорт», 7.06010103 «Міське будівництво та господарство», 7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво», 7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція») / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х. : ХНУМГ, 2014. – 118 с.

Автори: В. П. Шпачук,  
М. С. Золотов,  
О. І. Рубаненко,  
А. О. Гарбуз.

Рецензент: к.т.н., доц. кафедри теоретичної і будівельної механіки  
ХНУМГ В. О. Пушня.

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних, екологічних і транспортних спеціальностей вузів при підготовці до занять, заліків та іспитів з курсу теоретичної механіки.

Він містить основні питання з трьох розділів теоретичної механіки: статички, кінематики і динаміки. В додатках наведені завдання для контрольних і самостійних робіт студентів в позааудиторний час.

В кожному розділі наведено приклади задач та методичні вказівки до їх розв'язання.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,  
протокол № 2 від 22.10.2013 р.

© В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко,  
А. О. Гарбуз, 2014  
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014

## ВСТУП

Теоретична механіка – одна з найважливіших наук фізико-математичного профілю, що формує науковий світогляд інженера. На її законах базуються такі загально інженерні дисципліни, як опір матеріалів, будівельна механіка, прикладна механіка, деталі машин, теорія машин і механізмів, гідравліка та ін. Тому вивчення теоретичної механіки необхідне як для розуміння цих дисциплін, так і для наукового тлумачення явищ природи.

Даний навчально-методичний посібник складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних, екологічних і транспортних спеціальностей вузу в самостійній роботі, при підготовці до занять, контрольних робіт, тестового контролю, захисту змістовних модулів, заліків та іспитів з теоретичної механіки.

### **Визначення:**

**Теоретична механіка** – наука про найбільш загальні закони механічного руху та рівноваги матеріальних тіл і виникаючі між ними взаємодії.

## 1 СТАТИКА

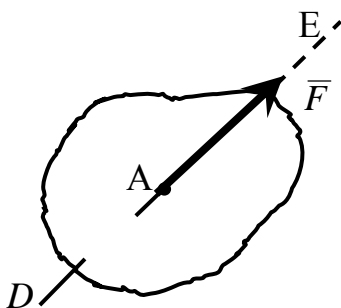
**Статика** – розділ теоретичної механіки, який вивчає методи перетворення одних систем сил в інші, їм еквівалентні, а також умови рівноваги твердих тіл під дією системи сил.

**Абсолютно тверде тіло** – матеріальне тіло, в якому відстань між будь-якими двома точками не змінюється.

**Матеріальна точка** – найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого при умовах даної задачі можна знехтувати.

**Механічна система** – сукупність взаємозв'язаних матеріальних точок, положення і переміщення кожної з яких залежить від положення і переміщення всіх інших.

**Сила** – це величина, що є мірою механічної взаємодії двох тіл. Сила – векторна величина, яка визначається модулем, лінією дії, напрямком дії та точкою прикладення.



Одиницею виміру сили є 1 ньютон ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$ ), або 1 кілограм сили (1 кГ),  $1 \text{ кГ} \approx 9,8 \text{ Н}$ .

**Лінія дії сили** – лінія  $DE$ , уздовж якої напрямлена сила.

**Система сил** – сукупність сил, що діють на будь-яке тіло.

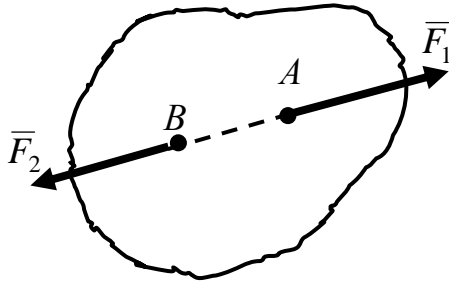
**Еквівалентні системи сил** – системи сил, під дією яких тверде тіло знаходиться в однаковому стані (рівноваги або руху). Позначається « $\sim$ ».

**Зрівноважена система сил** (або еквівалентна нулю) – система сил, під дією якої тверде тіло знаходиться у стані рівноваги.

**Рівнодійна системи сил** – сила, еквівалентна даній системі сил.

*Аксіоми статики:*

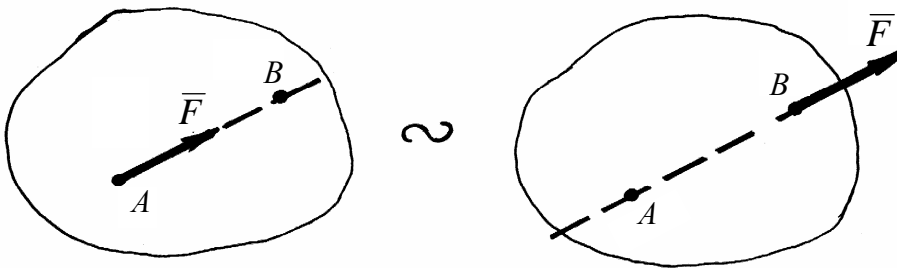
1. Дві сили, що діють на вільне абсолютно тверде тіло, зрівноважені тоді і тільки тоді, коли вони рівні за величиною, протилежні за напрямом і діють уздовж однієї прямої:



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

2. Приєднання і відкидання взаємно зрівноваженої системи не порушує рівновагу абсолютно твердого тіла.

*Наслідок з аксіом 1 і 2:* Дія сили на абсолютно тверде тіло не змінюється, якщо перенести силу уздовж лінії дії в іншу точку тіла.



3. Система двох сил, прикладених в одній точці під деяким кутом одна до одної, має рівнодійну, яка за своєю величиною і напрямом дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

4. Сили взаємодії двох тіл завжди рівні за величиною і діють по одній прямій у протилежних напрямках.

5. Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями.

6. Принцип затвердіння: рівновага zdeформованого тіла не порушиться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

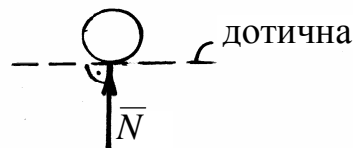
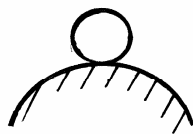
**Вільне тіло** – це таке тіло, на переміщення якого не накладені обмеження.

**В'язі** – це тіла, що обмежують рух даного тіла.

**Реакція в'язі** – це сила, з якою в'язь діє на тіло, рух якого вона обмежує.

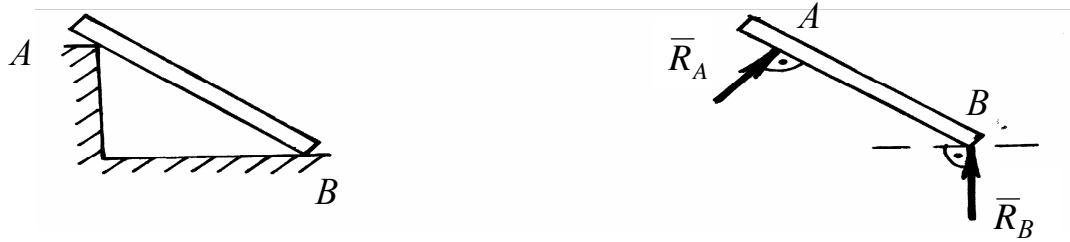
*Види в'язей і напрям їх реакції:*

1. Ідеальна гладенька поверхня.



Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стику з даним тілом.

## 2. Ребро



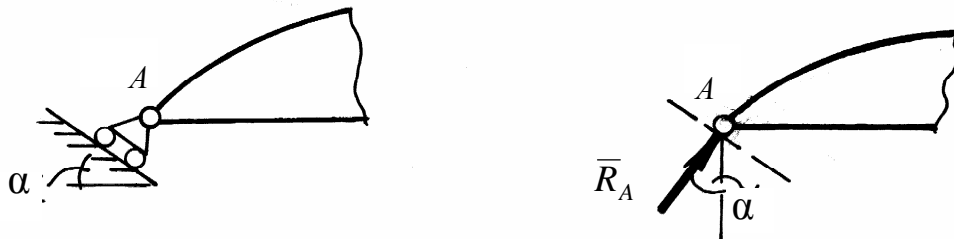
Якщо опора є ребром, реакція в'язі спрямована по нормалі до тієї поверхні, до якої можна провести нормаль.

## 3. Гнучка в'язь.



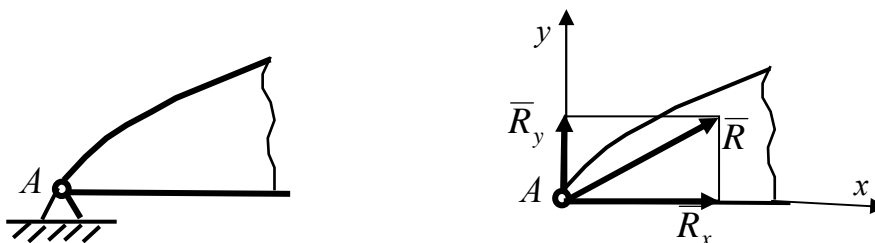
Такі в'язі працюють тільки на розтяг. Їх реакції напрямлені вздовж нитки, каната, ланцюга, якщо вони прямолінійні, або по дотичній в точці А в іншому випадку.

## 3. Рухомий шарнір.



Реакція такої в'язі спрямована перпендикулярно до опорних площин, на яких знаходяться котки.

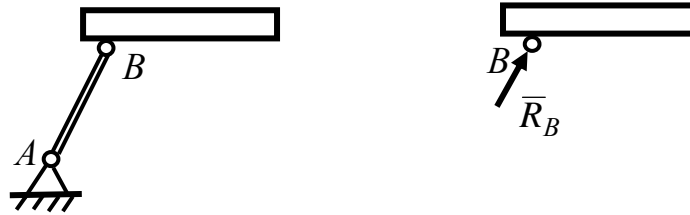
## 5. Нерухомий шарнір.



Реакція нерухомого шарніра може мати довільний напрям залежно від сил, прикладених до тіла. Тому реакцію  $\bar{R}$  нерухомого шарніра показують у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових, напрямлених звичайно вздовж координатних осей:

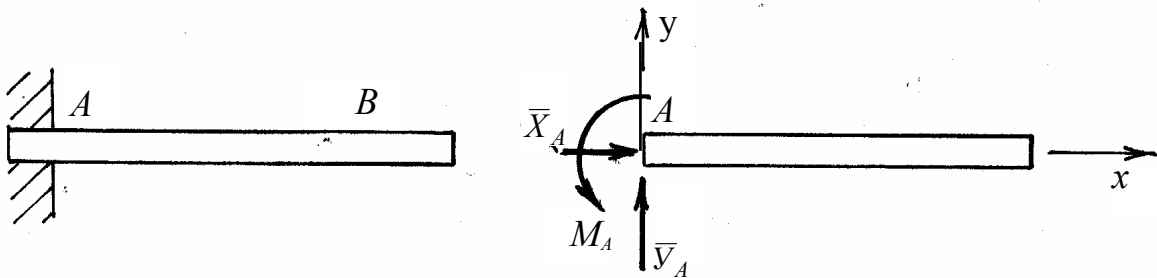
$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y; R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

## 6. Ідеальний стержень.



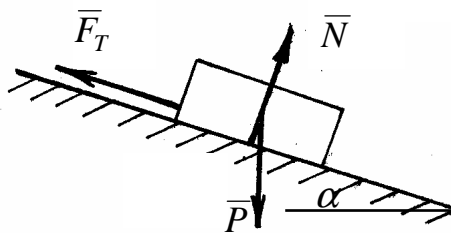
Так називається тонкий невагомий стержень, закріплений двома шарнірами на його кінцях. Такий стержень працює тільки на розтяг або на стиск, якщо в проміжних точках на нього не діють ніякі сили. Реакція ідеального стержня напрямлена по осі стержня.

## 7. Жорстке защемлення (нерухоме закріплення).



Балка  $AB$  одним своїм кінцем жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець служить опорою для конструкції. Якщо на балку діють сили, то в закріпленні виникають реакції, що складаються із сили  $\bar{R}_A$  яку зображують у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових  $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$  і пари сил з моментом  $M_A$ .

## 8. Сила тертя ковзання $\bar{F}_T$ .

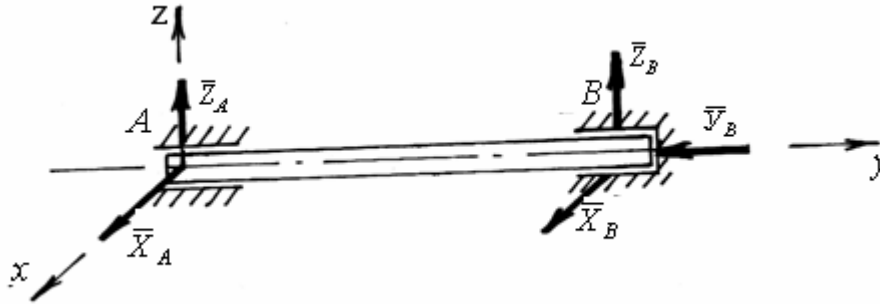


У цьому випадку реакцію опори можна розкласти на дві складові: силу  $\bar{N}$ , нормальну до поверхні опори, і силу  $\bar{F}_T$ , дотичну до поверхні опори (силу тертя). Сила тертя дорівнює:

$$F_T \leq f \cdot N,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання,  $N = P \cdot \cos \alpha$ ,  $\bar{P}$  – сила ваги тіла.

## 9. Підп'ятник і підшипник.



Якщо циліндричний шарнір не перешкоджає переміщенню тіла тільки в одному напрямі вздовж осі циліндра і перешкоджає переміщенню у протилежному напрямі, то такий циліндричний шарнір називається підп'ятником. Опорна реакція підп'ятника має три складові по трьох взаємно перпендикулярних напрямках

$$\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B + \bar{Z}_B.$$

Якщо циліндричний шарнір не перешкоджає переміщенню тіла тільки в одному напрямі вздовж осі циліндра, то такий циліндричний шарнір називається підшипником. Опорна реакція підшипника має дві складові по двом взаємно перпендикулярним напрямкам

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Z}_A, \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2}.$$

## 10. Сферичний шарнір.

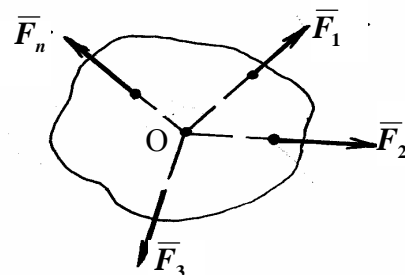


У випадку сферичного шарніра тіло може обертатися навколо центра шарніра, але не має змоги переміщуватись у будь-якому напрямі. Реакцію сферичного шарніра виражають трьома складовими у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$$

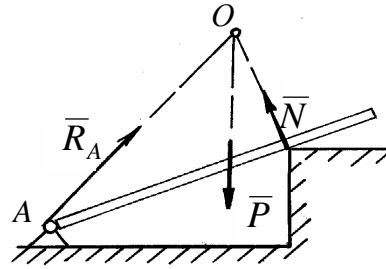
### 1.1 Система збіжних сил

**Система збіжних сил** – це така система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Тут точка  $O$  – точка збігу сил.



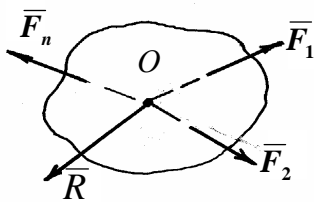
**Теорема про три непаралельні сили:** Якщо тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії усіх трьох сил перетинаються в одній точці.

За допомогою цієї теореми можна в певному випадку визначити лінію дії, наприклад, реакції  $\bar{R}_A$  нерухомого шарніра, враховуючи, що лінії дії сили ваги  $\bar{P}$  і реакції  $\bar{N}$  відомі.



### Теорема про рівнодійну системи збіжних сил:

Система збіжних сил має рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в точці перетину їх ліній дії.



$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

*Умови рівноваги системи збіжних сил:*

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна системи сил дорівнювала нулю (геометричні умови):

$$\bar{R} = 0,$$

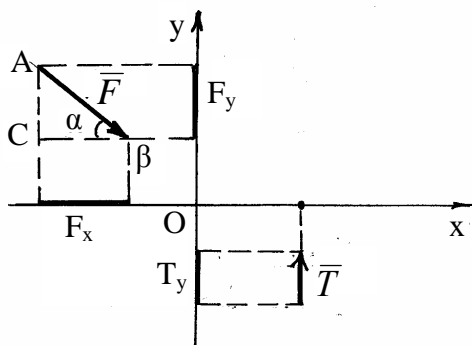
або сума проекцій цих сил на осі координат дорівнювала нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Якщо всі сили системи збіжних сил розташовані в площині, наприклад  $XOY$ , то для їх рівноваги повинно бути

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

## 1.2 Проекція сили на вісь

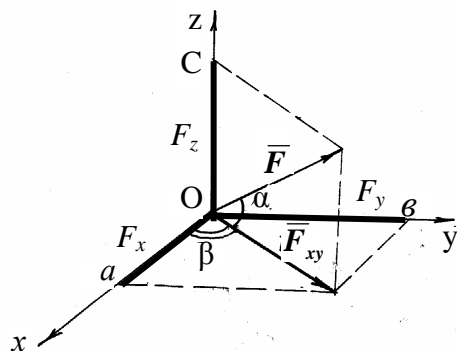


**Проекція сили на вісь** – алгебраїчна величина, що дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-» - якщо в бік від'ємного напрямку.



Величина проекції сили визначається розв'язанням трикутника  $ABC$ , який утворюється початковою силою і лініями, паралельними осям координат.

Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.



$$\begin{aligned} \text{Тому } F_x &= F \cdot \cos \alpha, & F_y &= -F \cdot \sin \alpha, \\ T_x &= 0, & T_y &= T. \end{aligned}$$

Якщо сила знаходиться у просторі, то її проекції визначаються так:

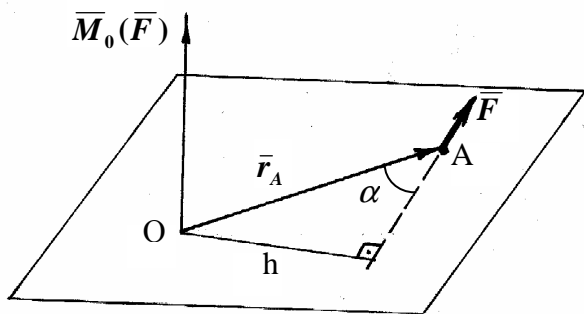
$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta, \\ F_y &= F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta, \\ F_z &= F \sin \alpha. \end{aligned}$$

### 1.3 Моменти сили і пари сил

#### 1.3.1 Момент сили відносно точки

Плечем  $h$  сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  називається довжина перпендикуляра, проведеного з точки до лінії дії сили.

$$\text{Модуль моменту } M_0(\vec{F}) = F \cdot r_A \cdot \sin \alpha = F \cdot h.$$



**Моментом сили відносно точки  $O$**  називається вектор  $\vec{M}_0(\vec{F})$ , модуль якого дорівнює добутку сили на плече, прикладений у цій точці  $O$  і напрямлений перпендикулярно до площини, що проходить через точку  $O$  і лінію дії сили, у той бік, звідки обертання сили відносно точки видно проти ходу стрілки годинника.

Вектор моменту сили  $\vec{M}_0(\vec{F})$  можна подати як векторний добуток радіуса-вектора точки прикладення сили на вектор сили:

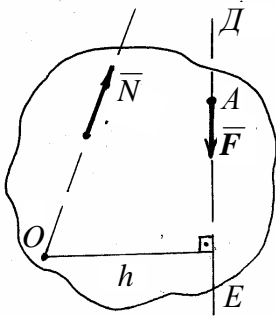
$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x),$$

де  $x, y, z$  – декартові координати точки  $A$  прикладання сили;  $F_x, F_y, F_z$  – проекції сили  $\vec{F}$  на осі координат;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти осей  $x, y, z$ .

При розв'язанні задач у площині використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

*Правило визначення алгебраїчного моменту сили  $\vec{F}$  відносно точки :*

1. Провести лінію дії сили ( пряма ДЕ ).
2. З вибраної точки  $O$  провести перпендикуляр на лінію дії сили (його довжина  $h$  – плече сили).



$$M_0(\vec{N}) = F \cdot 0 = 0.$$

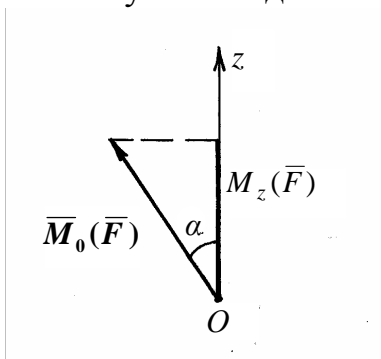
3. Скласти добуток модуля сили на плече ( $F \cdot h$ ).

4. Взяти знак «+», якщо сила прагне обертати плече відносно точки проти руху годинникової стрілки, і знак «-» – якщо за стрілкою годинника:  $M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h$ .

Алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку. Тоді плече  $h = 0$ , а момент

### 1.3.2 Момент сили відносно осі

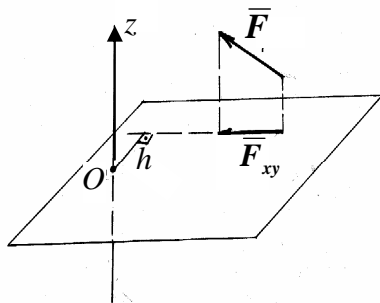
**Моментом сили відносно осі  $z$**  називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно точки, що лежить на осі:



$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_0(\vec{F})]_z = M_0(\vec{F}) \cdot \cos \alpha.$$

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі.

*Правило визначення моменту сили  $\vec{F}$  відносно осі  $z$ :*



1. Провести площину, перпендикулярну до осі  $z$  і знайти точку  $O$  перетину осі з площиною.
2. Спроектувати силу на проведену площину (вектор  $\vec{F}_{xy}$  – проекція сили  $\vec{F}$  на площину).

3. Знайти момент отриманої сили  $\vec{F}_{xy}$  відносно точки перетину осі з площиною  $O_{xy}$ :

$M_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$ . Взяти знак «+», якщо з додатного кінця осі  $z$  видно, що проекція сили  $\vec{F}_{xy}$  прагне обертати площину навколо осі проти руху годинникової стрілки, і знак «-» – якщо за стрілкою годинника.

4. Момент сили  $\vec{F}$  відносно осі  $z$  визначити як

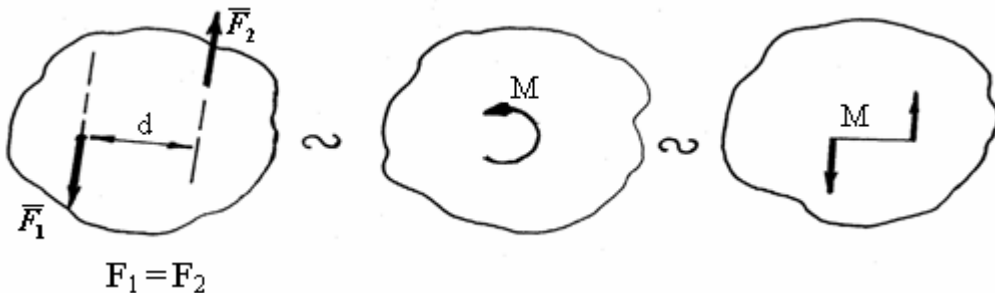
$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

- а) сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили на площину  $F_{xy} = 0$ );
- б) лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече  $h = 0$ ).

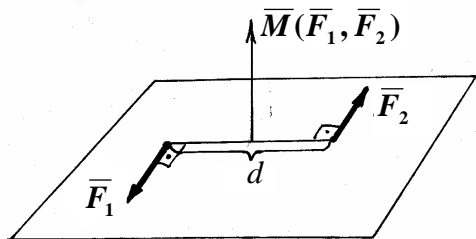
### 1.3.3 Момент пари сил

**Парою сил** називається система двох розташованих в одній площині сил, які рівні за величиною, протилежно напрямлені і не лежать на одній лінії дії.



**Плече пари**  $d$  – найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару.

**Моментом пари сил** називається вектор  $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ , модуль якого



дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари, направлений перпендикулярно до площини дії пари у той бік, звідки обертання пари сил видно проти ходу стрілки годинника.

Модуль моменту пари  
 $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d.$

#### Властивості пари сил:

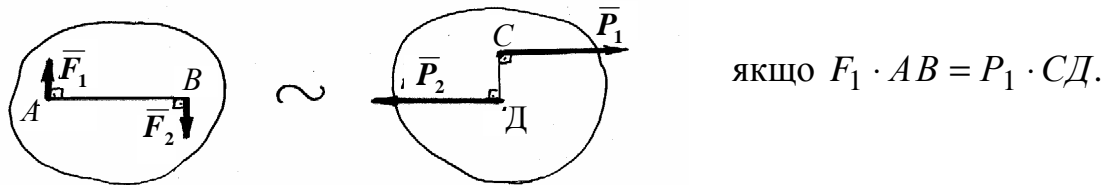
1. Пара сил не має рівнодійної. Тому пару сил не можна замінити або зрівноважити однією силою; її можна зрівноважити тільки іншою парою.

2. Геометрична сума моментів сил, які складають пару, відносно будь-якої точки  $O$  не залежить від вибору цієї точки і дорівнює моменту пари сил:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

3. Дві пари еквівалентні, якщо їх моменти геометрично рівні.

Наслідком цієї властивості є те, що пару сил, яка діє на абсолютно тверде тіло, можна переміщати у площині її дії, або у паралельну площину, при цьому можна змінювати модулі сил або плече пари, але зберігати величину моменту і напрям обертання:



4. Система кількох пар, як завгодно розташованих у просторі, еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i.$$

**Умова рівноваги системи пар сил:**

Пари сил, як завгодно розташовані у просторі, перебувають у рівно-вазі, якщо геометрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = 0.$$

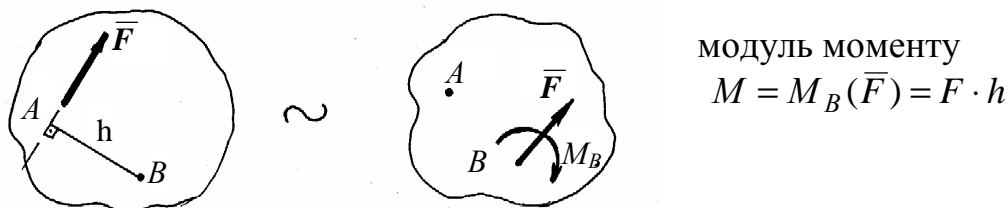
#### 1.4 Довільна просторова система сил

**Просторова система сил** – система сил, як завгодно розташованих у просторі.

Відповідно до аксіоми 2 статки прикладену до тіла силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку іншу його точку. При цьому дія сили на тіло, а також стан тіла не змінюються.

У ряді практичних задач рівноваги, пов'язаних зі спрощенням заданої системи сил, часто виникає необхідність перенесення сили до заданого центра паралельно самій до себе. На відміну від попереднього випадку паралельне перенесення сили призводить в умовах збереження початкового механічного стану тіла до зміни системи діючих на нього силових факторів.

**Лема про паралельний перенос сили:** не змінюючи механічного стану абсолютно твердого тіла, силу можна перенести паралельно її початковому напрямку в іншу довільну точку тіла, додаючи при цьому пару сил, момент  $M$  якої дорівнює моменту початкової сили відносно точки перенесення:



**Головний вектор системи сил** – вектор  $\bar{F}$ , який дорівнює геометричній сумі всіх сил системи:  $\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$

Величина головного вектора визначається за формулами

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

де  $F_x, F_y, F_z$  – проекції головного вектора на осі координат:

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Напрямок головного вектора визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{x, \vec{F}}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\widehat{y, \vec{F}}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\widehat{z, \vec{F}}) = \frac{F_z}{F}.$$

**Головний момент системи сил відносно точки  $O$**  – вектор  $\vec{M}_0$ , який дорівнює геометричній сумі моментів сил системи відносно тієї ж точки:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i).$$

Величина головного моменту  $M_0$  відносно деякого центра зведення  $O$  дорівнює:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

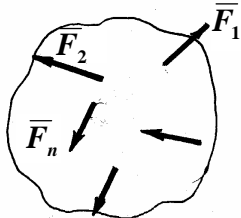
де  $M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}$  – проекції головного моменту на осі координат, рівні алгебраїчним суммам моментів усіх сил відносно осей  $x, y, z$ , що проходять через центр зведення  $O$ :

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i); \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i); \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i).$$

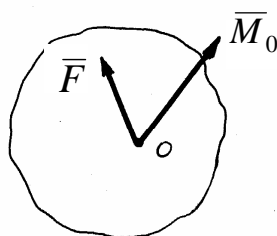
Напрямок головного моменту  $\vec{M}_0$  визначається за формулами

$$\cos(\widehat{x, \vec{M}_0}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{y, \vec{M}_0}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{z, \vec{M}_0}) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

**Теорема про зведення довільної системи сил (основна теорема статки):** Довільну систему сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, можна звести: до сили  $\vec{F}$ , яка дорівнює головному вектору цієї системи сил і прикладена у довільному центрі зведення  $O$ , і до пари сил, момент якої  $\vec{M}_0$  дорівнює головному моменту системи сил відносно центра зведення:



~



$$\text{де } \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

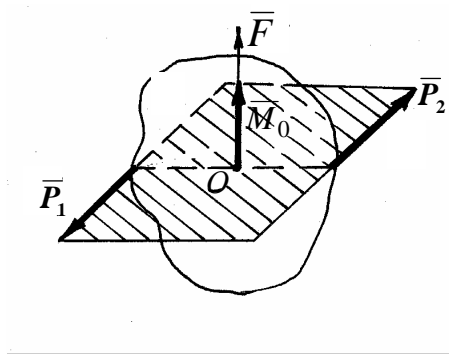
$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i).$$

*Окремі випадки зведення сил:*

1)  $\vec{F} = 0$ ;  $\vec{M}_0 = 0$  – система сил зрівноважена, тобто тверде тіло під дією такої системи сил знаходиться у рівновазі;

2)  $\bar{F} = 0$ ;  $\bar{M}_0 \neq 0$  – система сил зводиться до пари сил, момент якої не залежить від центра зведення;

3)  $\bar{F} \neq 0$ , скалярний добуток  $(\bar{F} \cdot \bar{M}_0) = 0$  (іншими словами,  $\bar{F} \neq 0$  і або  $\bar{M}_0 = 0$ , або  $\bar{M}_0 \perp \bar{F}$ ) – система сил зводиться до рівнодійної  $\bar{F}$ , яка або проходить через центр зведення (якщо  $\bar{M}_0 = 0$ ), або ні (якщо  $\bar{M}_0 \neq 0$ );



4)  $\bar{F} \neq 0$ , скалярний добуток  $(\bar{F} \cdot \bar{M}_0) \neq 0$  (тобто  $\bar{M}_0 \neq 0$  і  $\bar{M}_0 \perp \bar{F}$ ) – система сил зводиться до динамічного гвинта або динами, яка складається з сили  $\bar{F}$  і пари сил, площина дії якої перпендикулярна до напрямку  $\bar{F}$  (осі динами). Якщо вектор  $\bar{M}_0$  паралельний до  $\bar{F}$ , то вісь динами проходить через центр зведення; якщо  $\bar{M}_0$  не паралельний до  $\bar{F}$ , то вісь динами не проходить через центр зведення.

**Умови рівноваги довільної просторової системи сил:** Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\bar{F} = 0; \quad \bar{M}_0 = 0,$$

або суми проекцій усіх сил на кожную з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

**Умови еквівалентності двох систем сил:** Дві системи сил  $\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n\}$  і  $\{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m\}$  статично еквівалентні, якщо їх головні вектори  $(\bar{F}$  і  $\bar{P})$  і головні моменти відносно будь-якого центра  $(\bar{M}_0^F$  і  $\bar{M}_0^P)$  рівні між собою:

$$\bar{F} = \bar{P},$$

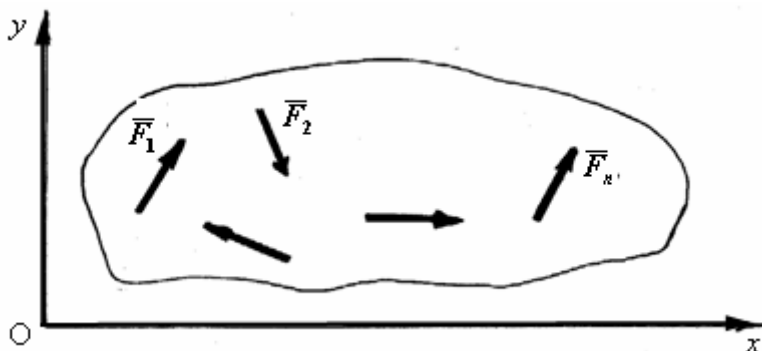
$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_0(\bar{P}).$$

**Теорема Варіньона (про момент рівнодійної):** Якщо просторова система сил має рівнодійну  $\bar{R}$ , то момент рівнодійної відносно будь-якої точки  $O$  дорівнює геометричній сумі моментів усіх сил системи відносно тієї ж точки:

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i)$$

## 1.5 Довільна плоска система сил

**Плоска система сил** – це така система сил, лінії дій яких розміщені в одній площині.



**Зведення плоскої довільної системи сил:** Ця система сил зводиться відносно центра зведення до сили  $\bar{F}$ , яка дорівнює головному вектору системи сил і прикладена у довільному центрі зведення, і до пари сил, момент якої  $\bar{M}_0$  дорівнює головному моменту системи відносно центра  $O$ .

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i).$$

**Умови рівноваги довільної плоскої системи сил:** Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\bar{F} = 0; \quad \bar{M}_0 = 0,$$

або алгебраїчна сума проекцій усіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0.$$

Відзначимо, що кількість рівнянь рівноваги плоскої системи сил у загальному випадку дорівнює трьом. Ці рівняння можна подати ще у двох формах, а саме:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0.$$

(при цьому вісь  $Ox$  не повинна бути перпендикулярною до прямої  $AB$ ) або

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0$$

(при цьому точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  не повинні лежати на одній прямій).

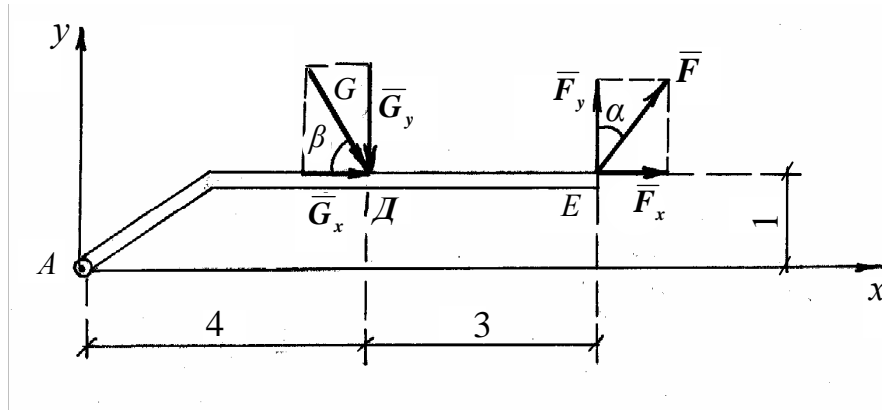
**Теорема Варіньона для плоскої системи сил:** Якщо плоска система сил зводиться до рівнодійної, то її момент відносно будь-якої точки площини дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно тієї ж точки:

$$M_0(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i).$$

Цю теорему зручно використовувати для знаходження алгебраїчного моменту сили відносно точки, розкладаючи силу на складові, паралельні осям координат:

$$M_A(\bar{G}) = M_A(G_x) + M_A(G_y) = -G_x \cdot 1 - G_y \cdot 4,$$

$$M_A(\bar{F}) = M_A(F_x) + M_A(F_y) = -F_x \cdot 1 + F_y \cdot 7,$$



де модулі складових

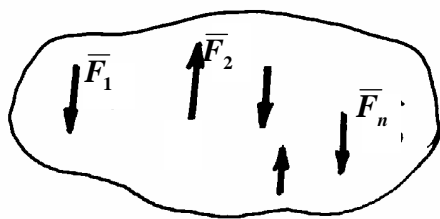
$$G_x = G \cdot \cos \beta,$$

$$G_y = G \cdot \sin \beta,$$

$$F_x = F \cdot \sin \alpha,$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha.$$

### 1.6 Плоска система паралельних сил. Розподілені сили



Система паралельних сил – це така система сил, лінії дії яких паралельні між собою.

**Умова рівноваги плоскої системи паралельних сил:** Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума

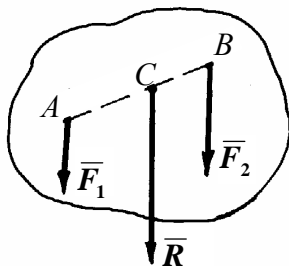
проекцій усіх сил на вісь, паралельну силам, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0$$

(якщо всі сили паралельні осі Oy).

**Складання двох паралельних сил:**

1. Сили напрямлені в один бік:

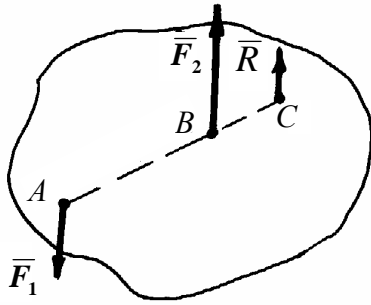


$$R = F_1 + F_2,$$

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC.$$

2. Сили напрямлені в різні боки ( $F_2 > F_1$ ):

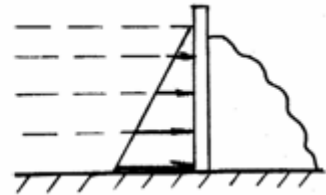
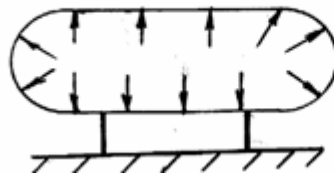
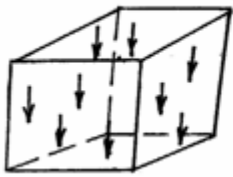




$$R = F_2 - F_1,$$

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC.$$

**Розподілені сили (розподілене навантаження)** – система паралельних сил, які діють на кожну точку об'єму, поверхні або лінії.

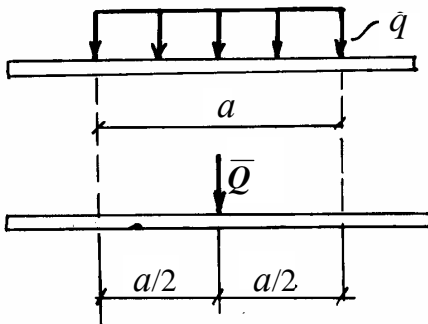


Система розподілених сил (сили розподілені уздовж лінії) характеризується її інтенсивністю  $q$ , тобто силою, яка припадає на одиницю довжини:

$$[q] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \frac{\text{кГ}}{\text{см}} \text{ і т.п.}$$

Деякі найпростіші приклади розподілених сил:

1) Рівномірно розподілені сили:  $q = \text{const}$ .

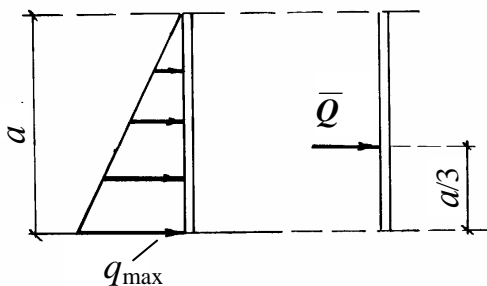


Рівнодійна такої системи сил  $\bar{Q}$  дорівнює за модулем

$$Q = q \cdot a$$

і прикладена посередині відрізка, на який діють розподілені сили.

2) Сили, розподілені за лінійним законом:



Рівнодійна  $\bar{Q}$  дорівнює за модулем

$$Q = \frac{1}{2} q_{\text{max}} \cdot a$$

і прикладена на відстані  $a/3$  від краю, де інтенсивність максимальна.

## 1.7 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

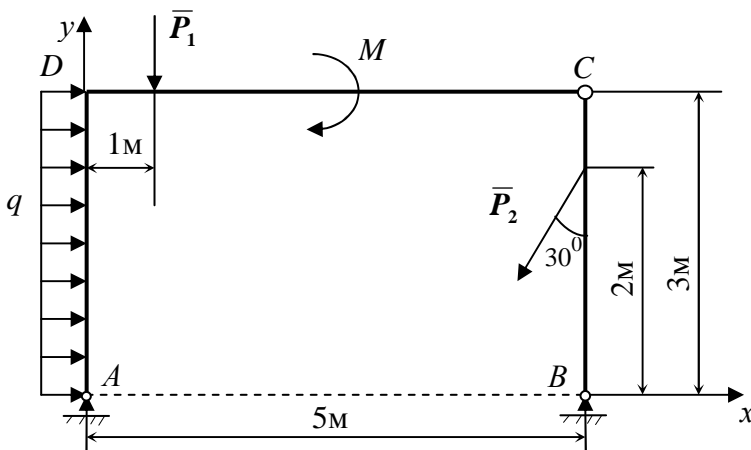
- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

**Приклад 1.** Два невагомих стержні  $ADC$  і  $BC$  з'єднані між собою шарніром  $C$  і закріплені нерухомими шарнірами  $A$  і  $B$ . На конструкцію діють сили  $P_1=10$  кН,  $P_2=20$  кН, розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 4$  кН/м і пара сил з моментом  $M=50$  кНм. Розміри задані на вихідній схемі. Треба визначити реакції опор  $A$  і  $B$ , а також тиск у проміжному шарнірі  $C$  складеної конструкції.

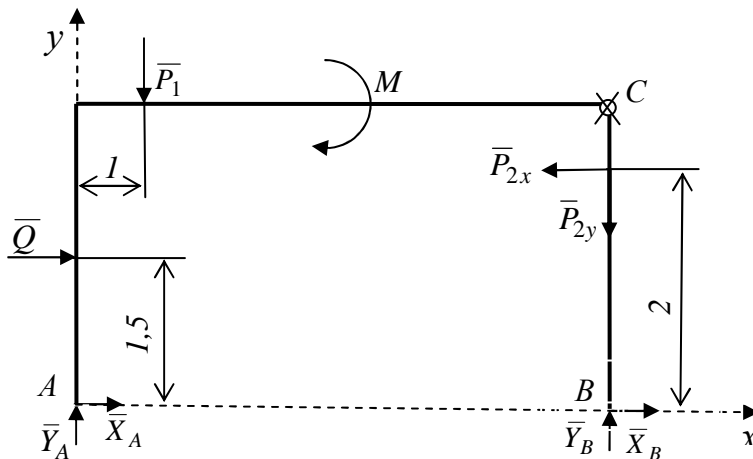
**Розв'язання:** При розв'язанні задачі першим способом будемо розглядати рівновагу всієї складеної конструкції, а також стержня  $CB$  окремо. Побудуємо розрахункову схему: відкинемо опори і замінимо їх реакціями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ , замінимо розподілене навантаження зосередженою силою

$Q = 3q$ , прикладеною в середині ділянки  $AD$ , побудуємо осі координат.

При цьому шарнір  $C$  вважатимемо нерухомим, використавши аксіому 5 за твердіння.



Визначимо величини сил  $\bar{Q}, \bar{P}_{2x}$  і  $\bar{P}_{2y}$ :



$$Q = 3q = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P \cdot \sin 30^\circ,$$

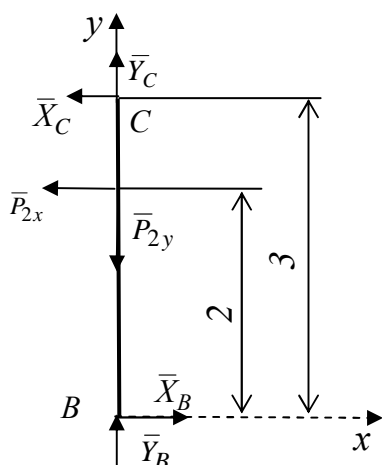
$$P_{2y} = P \cdot \cos 30^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги нерозчленованої конструкції:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_B + Q - P_{2x} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_B - P_1 - P_{2y} = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = -Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M + P_{2x} \cdot 2 = 0. \quad (3)$$



Далі розчленимо конструкцію на складові елементи і розглянемо окремо стержень  $BC$ . Дію відкинутої конструкції  $ADC$  замінимо реакціями  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  у шарнірі  $C$ .

*Примітка.* Напрямки осей координат на обох розрахункових схемах повинні співпадати.

Складемо рівняння рівноваги стержня  $BC$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - X_C - P_{2x} = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_B + Y_C - P_{2y} = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = X_B \cdot 3 - P_{2x} \cdot 1 = 0. \quad (6)$$

Відповідно до розглянутих розрахункових схем ми маємо шість невідомих реакцій опор  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  та реакції  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  у шарнірі  $C$ . Визначимо їх із складених шести рівнянь рівноваги.

Із третього рівняння знаходимо

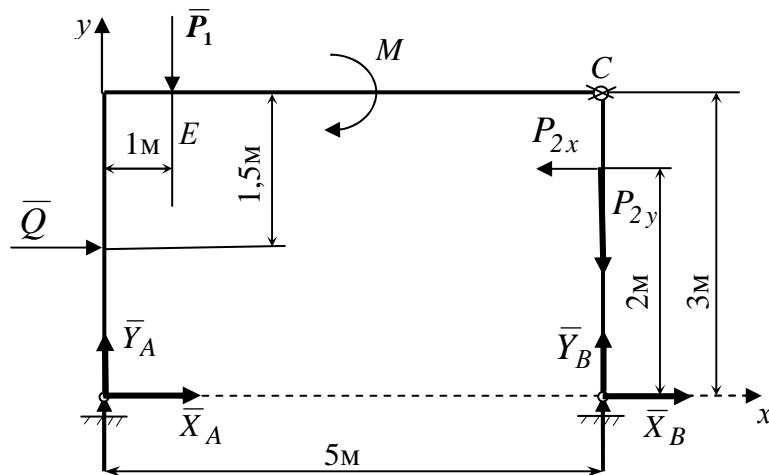
$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 4 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 2 - M - Q \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \sin 30^\circ \cdot 2 - 50 - 12 \cdot 1,5}{5} = -1,6 \text{ кН},$$

з другого рівняння отримаємо

$$Y_B = -Y_A + P_1 + P_{2y} = -(-1,6) + 10 + 20 \cos 30^\circ = 28,92 \text{ кН}.$$

$$\text{Із шостого рівняння знаходимо } X_B = \frac{P_2 \sin 30^\circ}{3} = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3,33 \text{ кН, з}$$

п'ятого отримаємо  $Y_C = P_2 \cos 30^\circ - Y_B = 20 \cdot \cos 30^\circ - 28,92 = -11,6 \text{ кН}$ , з четвертого –  $X_C = X_B - P_2 \sin 30^\circ = 3,33 - 20 \cdot \sin 30^\circ = -6,67 \text{ кН}$ , і, нарешті, з першого –  $X_A = -X_B - Q + P_2 \sin 30^\circ = -3,33 - 12 + 20 \cdot \sin 30^\circ = -5,33 \text{ кН}$ .



Значення  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$  менші від нуля, відповідно ці реакції в дійсності спрямовані протилежно зображеним на рисунку.

Для перевірки одержаних величин реакцій опор  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  розглянемо складену конструкцію в цілому і складемо рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад, відносно точки  $E$ . Шарнір  $C$  знову будемо вважати нерухомим.

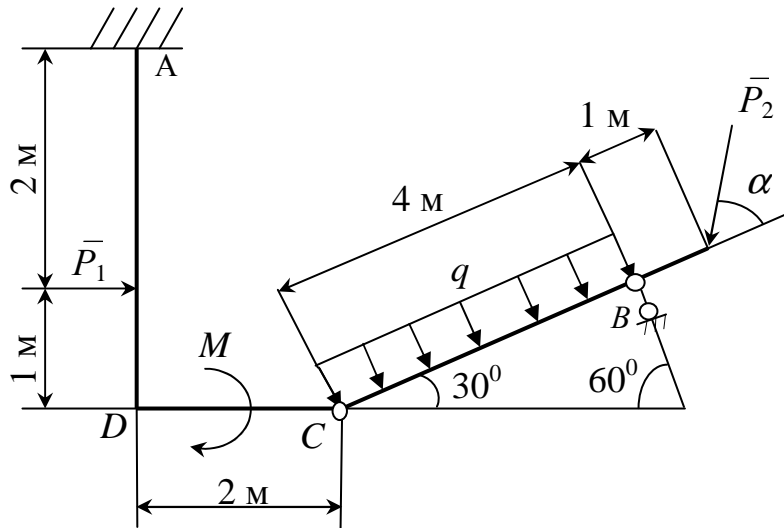
**Перевірка:**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_E(\bar{F}_i) &= X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 + Q \cdot 1,5 - M - P_{2x} \cdot 1 - P_{2y} \cdot 4 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 3 = \\ &= -5,33 \cdot 3 - (-1,6) \cdot 1 + 12 \cdot 1,5 - 50 - 20 \sin 30^\circ \cdot 1 - 20 \cos 30^\circ \cdot 4 + 28,92 \cdot 4 + \\ &+ 3,33 \cdot 3 = -15,99 + 8 + 18 + 40 - 50 - 10 + 9,9 = -145,27 + 145,27 = 0. \end{aligned}$$

При цьому рівність нулю суми моментів сил відносно точки  $E$  означає правильність визначених реакцій.

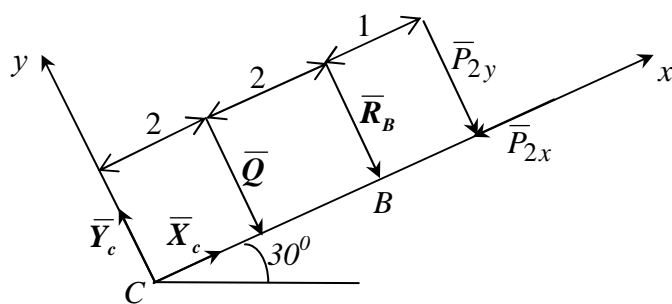
**Приклад 2.** Знайти реакції опор  $A$  і  $B$ , а також тиск у проміжному шарнірі  $C$  складеної конструкції, на яку діють сили  $P_1 = 6$  кН,  $P_2 = 10$  кН, розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 1,4$  кН/м і пара сил з моментом  $M = 15$  кНм. Розміри задані на початковій схемі, кут  $\alpha = 60^\circ$ .

**Розв'язання.** При розв'язанні задачі другим способом будемо розглядати рівновагу стержнів  $ADC$  і  $BC$  конструкції окремо. Побудуємо розрахункові схеми за звичайним правилом. Тут слід враховувати, що відповідно до аксіоми 4 реакції  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  і  $\bar{X}'_C, \bar{Y}'_C$  в шарнірі  $C$  задовольняють наступним рівностям:  $X_C = X'_C, Y_C = Y'_C$ . Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою  $Q = 4q$ , яку прикладемо в середині ділянки  $CB$ .



Визначимо величини сил  $\bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}, \bar{Q}$ , що діють на стержень CB:

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН}, \quad P_{2y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,7 \text{ кН},$$



$$Q = 4q = 5,6 \text{ кН}.$$

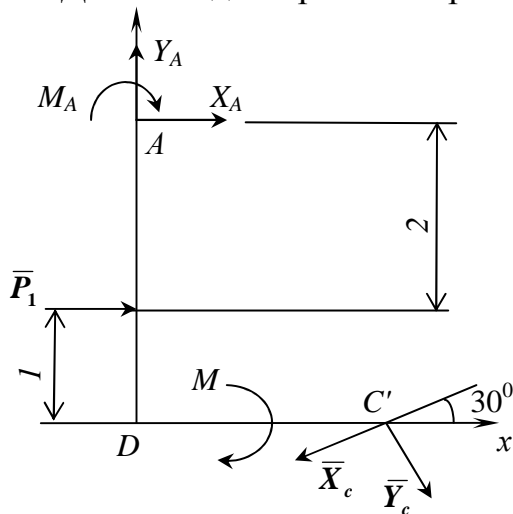
Складемо рівняння рівноваги стержня BC:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_C - P_{2x} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_C - Q + R_B - P_{2y} = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_C = -Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_{2y} \cdot 5 = 0. \quad (3)$$

Далі складемо рівняння рівноваги стержня ADC:



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_1 - X_C \cos 30^\circ + \quad (4)$$

$$+ Y_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Y_C \sin 60^\circ - \quad (5)$$

$$- X_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = -M_A + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + \quad (6)$$

$$+ Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - M - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 -$$

$$- Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = 0.$$

З отриманих шести рівнянь визначимо невідомі реакції:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C, \bar{R}_B$ .

Із третього рівняння знаходимо

$$R_B = \frac{Q \cdot 2 + P_{2y} \cdot 5}{4} = \frac{5,6 \cdot 2 + 8,7 \cdot 5}{4} = 13,67 \text{ кН},$$

з першого рівняння  $X_C = P_{2x} = 5 \text{ кН},$

з другого рівняння  $Y_C = Q - R_B + P_{2y} = 5,6 - 13,67 + 8,7 = 0,63 \text{ кН},$

з п'ятого рівняння

$$Y_A = Y_C \sin 60^\circ + X_C \sin 30^\circ = 0,63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3,05 \text{ кН},$$

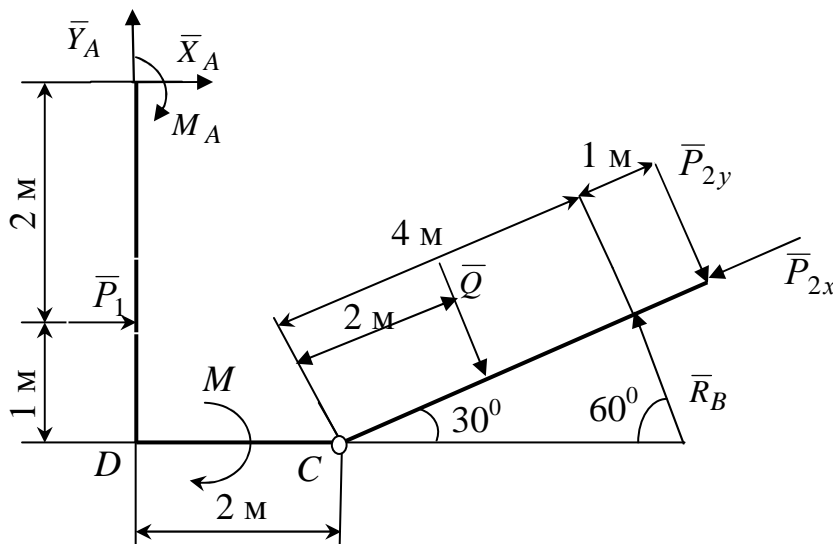
з четвертого

$$\begin{aligned} M_A &= -M + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - \\ &- Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = -15 + 6 \cdot 2 - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + 0,63 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 0,63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \\ &= -21,14 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

$$X_A = -Y_C \cos 60^\circ + X_C \cos 30^\circ - P_1 = -0,63 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = -1,98 \text{ кН},$$

з шостого

Для перевірки розглянемо конструкцію в цілому і складемо для неї рівняння моментів відносно точки  $C$ , через яку не проходять лінії дій визначених реакцій. Шарнір  $C$  вважаємо затверділим.



**Перевірка:**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= -M_A - X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 2 - P_1 \cdot 1 - M - Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_{2y} \cdot 5 = \\ &= -(-21,14) - (-1,98) \cdot 3 - 3,05 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 15 - 5,6 \cdot 2 + 13,67 \cdot 4 - 8,7 \cdot 5 \approx 0. \end{aligned}$$

Рівність нулю суми моментів сил відносно точки  $C$  означає, що задачу розв'язано правильно.

## 1.8 Розрахунок плоскої ферми

### 1.8.1 Основні визначення і припущення

**Фермою** називається геометрично незмінна конструкція, що складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою за допомогою шарнірів.

Ферми являють собою досить розповсюджені складові частини промислових і цивільних споруд. Їх використовують як опори трубопроводів і ліній електропередач, радіовежі, конструкції кранів, елементи великих прольотів будівельних та спортивних споруд, елементи мостів та ін.

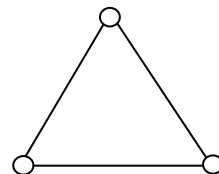
Якщо всі стержні ферми розташовані в одній площині, ферму називають *плоскою*. З'єднання стержнів ферми між собою називається *вузлами*.

Основним завданням розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у стержнях при дії зовнішнього навантаження. При цьому розрахунки виконують при наступних припущеннях:

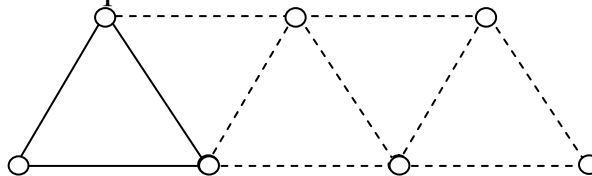
- усі зовнішні навантаження прикладені тільки у вузлах;
- вагою стержнів і тертям у вузлах, які є ідеальними шарнірами, нехтують.

Тоді на підставі першої аксіоми статки можна вважати, що стержні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Наведені припущення вносять певну похибку в розрахунки у порівнянні з дійсним напруженим станом стержнів, але ця похибка невелика і отримані результати можна використовувати для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стержнів, з'єднаних між собою шарнірами.



*Простою* плоскою фермою називається ферма, яка може бути побудована з трикутної шляхом послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох нових стержнів.



Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів  $n$  і кількістю стержнів  $k$  у простих фермах. Основний трикутник має три вузли і три стержні. Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти  $n-3$  вузлів потрібно приєднати два стержні. Отже, загальна кількість стержнів у простій ферми з урахуванням трьох стержнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3.$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо число опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил. Таким чином, усього можна скласти  $2n$  рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити  $k$  невідомих зусиль у стержнях і три реакції опор. З урахуванням формули загальне число невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто дорівнюватиме числу рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Зазначимо, що якщо число стержнів  $k$  менше ніж підраховане за формулою, то така конструкція буде механізмом, тобто матиме можливість рухатися. Якщо число стержнів більше, ніж підраховане за формулою, або число опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

### 1.8.2 Порядок розрахунку простої ферми

1. Спочатку складають три рівняння рівноваги для визначення реакцій опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій бажано скласти перевірочне рівняння.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і реакції опор. Але попереднє визначення опорних реакцій суттєво спрощує розв'язання задачі.

2. Далі визначають зусилля у стержнях ферми.

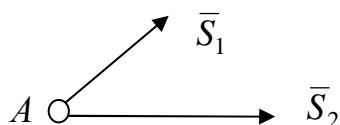
Звичайно використовують два способи: вирізання вузлів і Ріттера.

а) *Спосіб вирізання вузлів.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності припускають, що всі зусилля направлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля буде від'ємним, то це означатиме, що стержень стиснутий. Останній вузол розглядають, як правило, для перевірки.

Зусилля в окремих стержнях можуть виявитись нульовими, тобто стержні будуть не навантаженими. Такі стержні можна визначити за допомогою кількох лем.

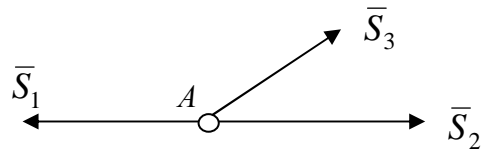
*Лема 1.* Якщо в не навантаженому вузлі ферми збігаються два стержні, то зусилля в цих стержнях дорівнюватимуть нулю, тобто



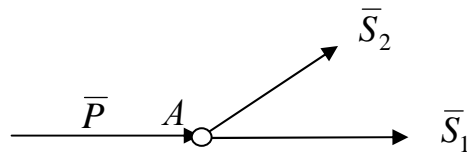
$$S_1 = 0 \text{ і } S_2 = 0.$$



*Лема 2.* Якщо в не навантаженому вузлі ферми збігаються три стержні, з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стержні дорівнює нулю:  $S_3 = 0$ .



*Лема 3.* Якщо до вузла, в якому збігаються два стержні, прикладена зовнішня сила  $\bar{P}$  у напрямку одного з стержнів, то зусилля у другому стержні дорівнює нулю:  $S_2 = 0$ .



*б) Спосіб Ріттера.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в окремих стержнях ферми, зокрема, для перевірочних розрахунків. Згідно з цим способом ферму розподіляють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стержні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стержнях направляють від перерізу, тобто припускають (як і в способі вирізання вузлів), що всі стержні розтягнуті. Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стержня, через який пройшов переріз. Для цього складають рівняння моментів відносно точки площини (цю точку називають *точкою Ріттера*), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стержнів, які потрапили в переріз. Якщо два інших стержні перерізу виявляються паралельними, то складають рівняння проекцій сил на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стержнів. Таким чином, спосіб Ріттера дає змогу визначити зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях.

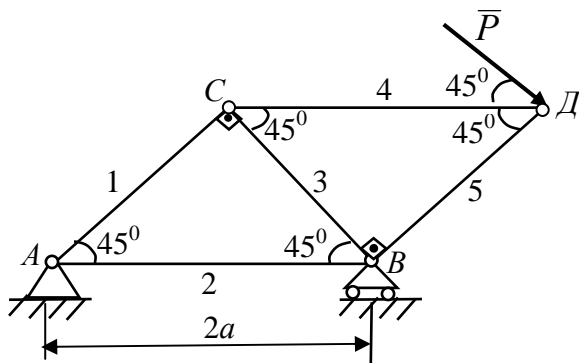
Аналізуючи вищеназвані способи визначення зусиль у стержнях, зазначимо, що зусилля способом вирізання вузлів визначають послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Це може призвести до накопичення похибок, тому бажано значення знайдених зусиль при розгляді наступних вузлів брати якомога точнішими. Крім того, помилка у визначенні одного зусилля призведе до неправильних розрахунків усіх інших стержнів, що залишились.

Спосіб Ріттера на відміну від попереднього не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного. Але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні. У деяких фермах також не всі зусилля можуть бути визначені способом Ріттера незалежно одне від одного.

Таким чином, найкраща методика визначення зусиль у стержнях ферми полягає в поєднанні способів вирізання вузлів і Ріттера. При цьому всі зусил-

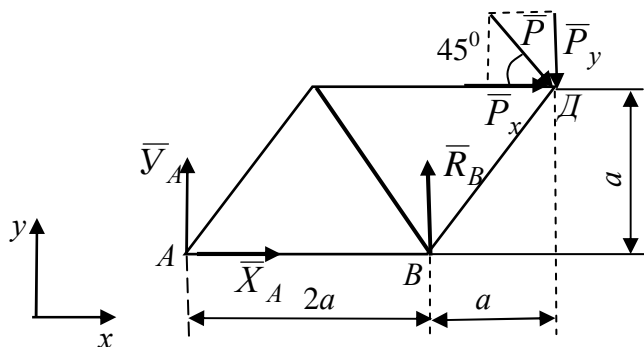
ля визначаються за способом вирізання вузлів і деякі з них перевіряють способом Ріттера.

**Приклад 1.** Визначити зусилля у стержнях ферми, на яку діє задана сила  $P = 10$  кН. Зусилля у стержнях 2, 3, 4 перевірити способом Ріттера.



**Розв'язання:**

1) Розглянемо рівновагу ферми і визначимо реакції опор  $A$  і  $B$ :



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де  $P_x, P_y$  – модулі складових сили  $\bar{P}$ :  $P_x = P \cdot \cos 45^\circ$ ,  $P_y = P \cdot \sin 45^\circ$ ,

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ кН};$$

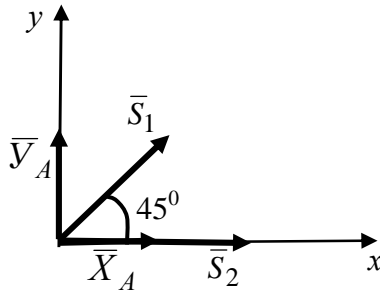
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

**Перевірка:**  $\sum_{i=1}^n M_D(F_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$   
 $= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$

2) Визначимо зусилля у стержнях ферми методом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла  $A$ :



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

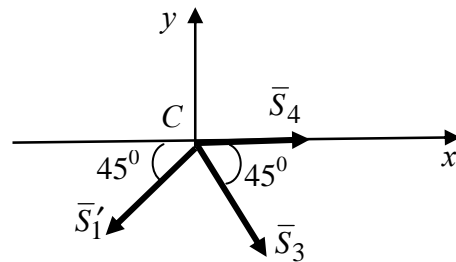
$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо рівновагу вузла C:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$-S'_1 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_3 = -S'_1 = -10 \text{ (кН)};$$



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S'_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

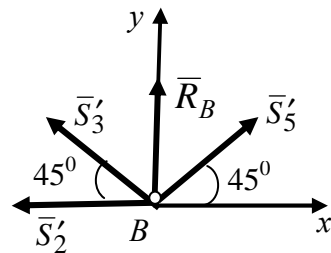
$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за модулем  $S'_1 = S_1 = 10 \text{ кН}$ );

в) розглянемо рівновагу вузла B:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S'_2 - S'_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$



$$S_5 = \frac{S'_2 + S'_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

друге рівняння можна використати для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -S'_3 \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

( $S'_2 = S_2$ ;  $S'_3 = S_3$ );

г) для перевірки розглянемо останній вузол Д :

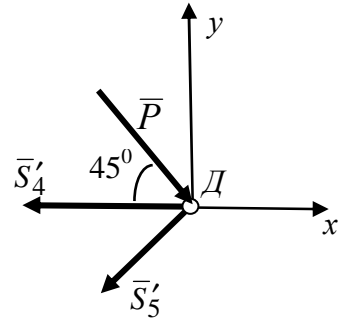
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S'_4 - S'_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

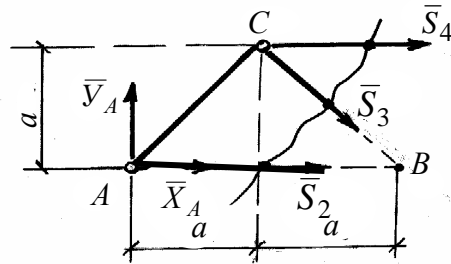
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S'_5 \sin 45^\circ =$$

$$-10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

( $S'_4 = S_4$ ;  $S'_5 = S_5$ );



3) Визначимо зусилля у стержнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стержні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми:



$$\sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0;$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

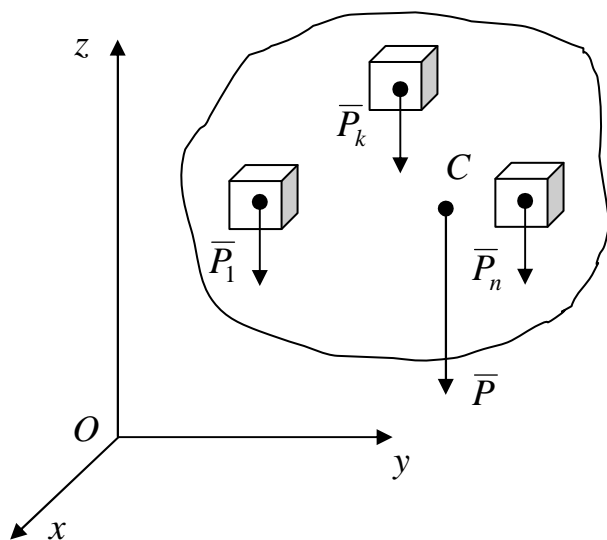
$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0; \quad S_4 - 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

**Відповідь:** 1)  $X_A \approx -7$  кН;  $Y_A \approx -7$  кН;  $R_B = 14$  кН; знаки «-» означають, що справжнє направлення складових  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  протилежне показаним на рисунках;

2)  $S_1 = 10$  кН;  $S_2 = 0$ ;  $S_3 = -10$  кН;  $S_4 \approx 14$  кН;  $S_5 = -10$  кН; стержні 1, 4 – розтягнуті; 3, 5 – стиснуті; 2 – не навантажений.

### 1.9 Центр ваги твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке знаходиться в полі сил тяжіння. Якщо розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, то можна вважати, що на частки цього тіла діють сили ваги  $\bar{P}_k$ , які складають систему паралельних сил.



**Центром ваги** твердого тіла називається центр паралельних сил ваги.

Координати центра ваги тіла визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{P},$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{P},$$

де  $P = \sum_{k=1}^n P_k$  – сила ваги тіла;  $x_k, y_k, z_k$  – координати точки прикладання сили ваги  $\bar{P}_k$  окремої частини тіла.

### 1.9.1 Центр ваги однорідного твердого тіла

Якщо тіло однорідне, то вага кожної частки тіла пропорційна його об'єму:

$$P_k = \gamma_1 V_k,$$

де  $V_k$  – об'єм елементарної частки тіла;  $\gamma_1$  – вага одиниці об'єму тіла.

Підставивши, отримаємо:

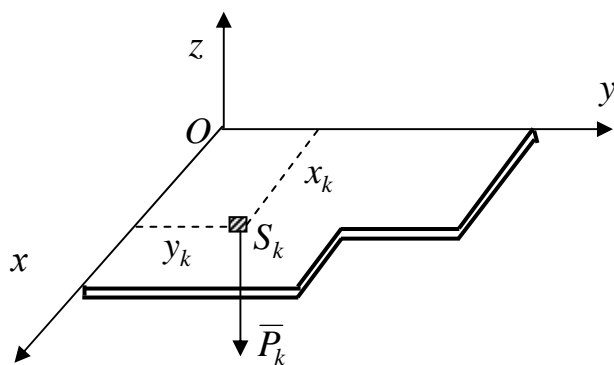
аналогічно

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_1 V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}, \end{aligned} \right\}$$

де  $V = \sum_{k=1}^n V_k$  – об'єм тіла.

Із формул видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів тіла. Тому точку  $C$ , яка визначається за формулами, називають **центом ваги об'єму тіла**.

### 1.9.2 Центр ваги однорідної пластини



**Пластиною** називають плоске тіло, один розмір якого (товщина) набагато менше двох інших (довжини і ширини):

$$P_k = \gamma_2 S_k,$$

де  $S_k$  – площа елементарної частки пластини;  $\gamma_2$  – вага одиниці площі.

Підставивши і вважаючи, що координатна площина  $xOy$  збігається з площиною пластини, отримаємо:

аналогічно

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_2 S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n x_k S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}, \end{aligned} \right\}$$

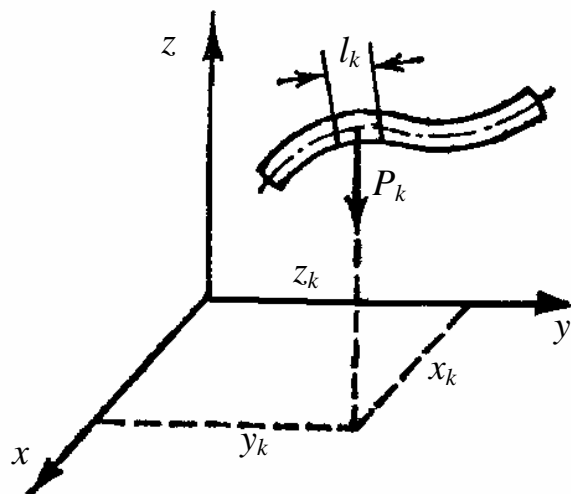
де  $S = \sum_{k=1}^n S_k$  – площа пластини.

Точку  $C$  з координатами  $x_c, y_c$  називають **центром ваги площі**.

Вирази у чисельниках формул називають відповідно **статичними моментами площі**  $S_y$  і  $S_x$  відносно осей  $x$  і  $y$ :

$$S_y = \sum_{k=1}^n x_k S_k = x_c \cdot S, \quad S_x = \sum_{k=1}^n y_k S_k = y_c \cdot S.$$

### 1.9.3 Центр ваги однорідного стержня



Стержнем називають тіло, один розмір якого (довжина) набагато більше двох інших. У цьому випадку вага елементарної частки тіла пропорційна її довжині

$$P_k = \gamma_3 l_k,$$

де  $l_k$  – довжина елементарної частки стержня;  $\gamma_3$  – вага одиниці довжини.

Підставивши, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_3 l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\gamma_3 \sum_{k=1}^n x_k l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}, \end{aligned} \right\} \text{аналогічно}$$

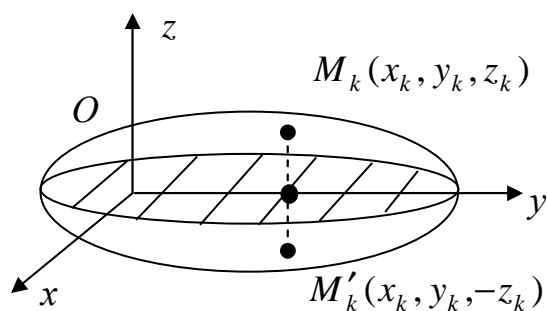
де  $L = \sum_{k=1}^n l_k$  – довжина стержня.

Точку  $C$  з координатами  $x_c, y_c, z_c$  називають **центром ваги лінії**.

#### 1.9.4 Способи визначення координат центра ваги

1. **Спосіб симетрії.** Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

Доведемо це твердження для тіла, що має площину симетрії. Розташуємо координатну площину  $xOy$  у площині симетрії (на рисунку ця площина заштрихована). Візьмемо в тілі дві точки  $M_k$  і  $M'_k$ , які розташовані симетрично відносно площини  $xOy$ .



У цих точках збігаються координати  $x_k, y_k$ , а координати  $z_k$  розрізняються тільки знаком. Виділимо навколо точок  $M_k, M'_k$  рівні елементарні об'єми  $V_k$ .

Підсумуємо додатки:  $z_k V_k + z'_k V_k = z_k V_k - z_k V_k = 0$ .

Розглянувши всі елементарні об'єми, отримаємо  $\sum_{k=1}^n z_k V_k = 0$

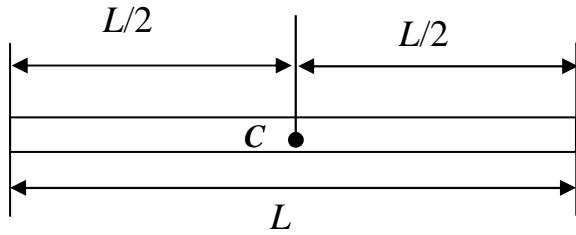
і обчислимо координату  $z_c$  центра ваги тіла за формулою  $z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V} = 0$ .

Це означає, що центр ваги розглядуваного тіла знаходиться у площині симетрії.

Аналогічно можна довести твердження для тіла, що має вісь або центр симетрії.

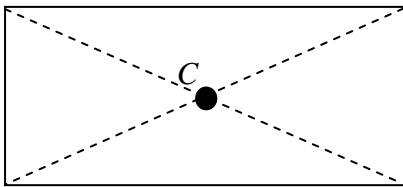
**Приклади.** Розглянемо декілька прикладів.

**а) прямолінійний стержень**



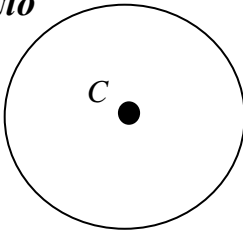
Центр симетрії такого стержня є точка у середині стержня. Отже, центр ваги прямолінійного стержня – точка  $C$  – знаходиться у середині стержня.

**б) прямокутник**



Центром симетрії прямокутника є точка перетину його діагоналей. Тоді центр ваги прямокутника – точка  $C$  – також знаходиться у точці перетину діагоналей. Як відомо, діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

**в) коло**

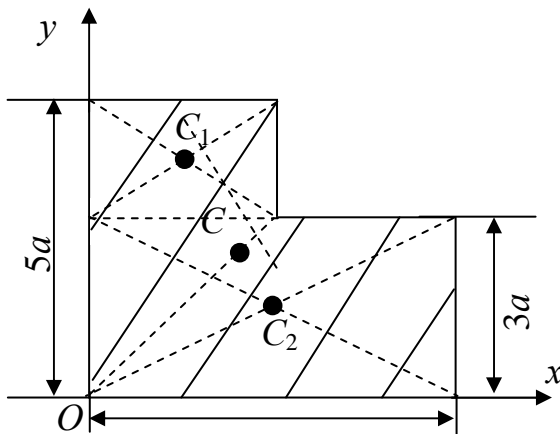


Центром симетрії, а значить і центром ваги кола є його центр.

## 2. Спосіб розбиття

Якщо тіло можна розбити на скінчене число таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами.

**Приклад 1.** Визначити координати центра ваги площі.



**Розв'язання.** Розіб'ємо площу на два прямокутники, центри ваги яких  $C_1$  і  $C_2$  знаходяться в точках перетину діагоналей. Виберемо систему координат  $Oxy$ . Дані про координати центрів ваги прямокутників і їх площі запишемо в таблицю.

Таблиця

$k$	$x_k$	$y_k$	$S_k$
1	$1,5a$	$4a$	$6a^2$
2	$2,5a$	$1,5a$	$15a^2$



Координати центра ваги площі знайдемо за формулами:

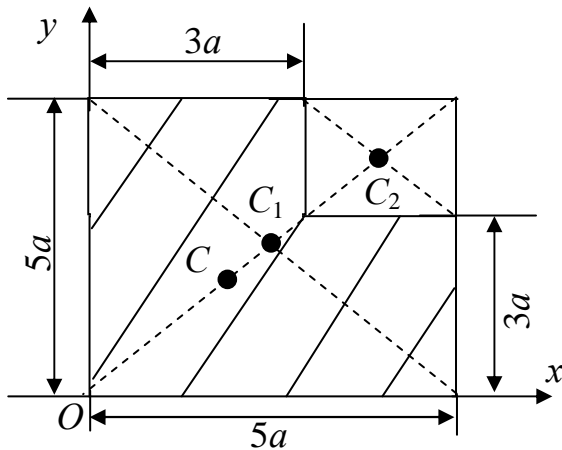
$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1,5a \cdot 6a^2 + 2,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{9a^3 + 37,5a^3}{21a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a,$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \cdot 6a^2 + 1,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{24a^3 + 22,5a^3}{21a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a.$$

Значення координат точки  $C(2,2a; 2,2a)$  свідчать, що вона лежить на бісектрисі кута, проведеної з центра координат, яка є лінією симетрії площі.

**3. Спосіб доповнення (або від'ємних площин).** Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

**Приклад 2.** Розглянемо задачу прикладу 1.



**Розв'язання.** Уявимо площу як квадрат зі сторонами  $5a \times 5a$  і центром ваги  $C_1$ , з якого вирізали квадрат зі сторонами  $2a \times 2a$  і центром ваги  $C_2$ . Площу останнього квадрата будемо вважати від'ємною. Дані про координати центрів ваги квадратів і їх площі запишемо в таблицю.

Таблиця

$k$	$x_k$	$y_k$	$S_k$
1	$2,5a$	$2,5a$	$25a^2$
2	$4a$	$4a$	$-4a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62,5a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a.$$

**4. Спосіб інтегрування.** Якщо тіло неможливо розбити на скінченне число часток, у формулах переходять до інтегралів.

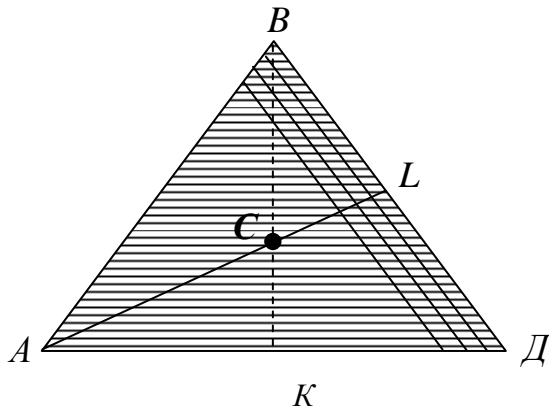
$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\int x dS}{S} \\ y_c &= \frac{\int y dS}{S} \end{aligned} \right\},$$

де інтеграли поширюються на площу  $S$ .

### 1.9.5 Центри ваги простіших фігур

Розглянемо декілька простих фігур, з яких можуть складатись більш складні фігури.

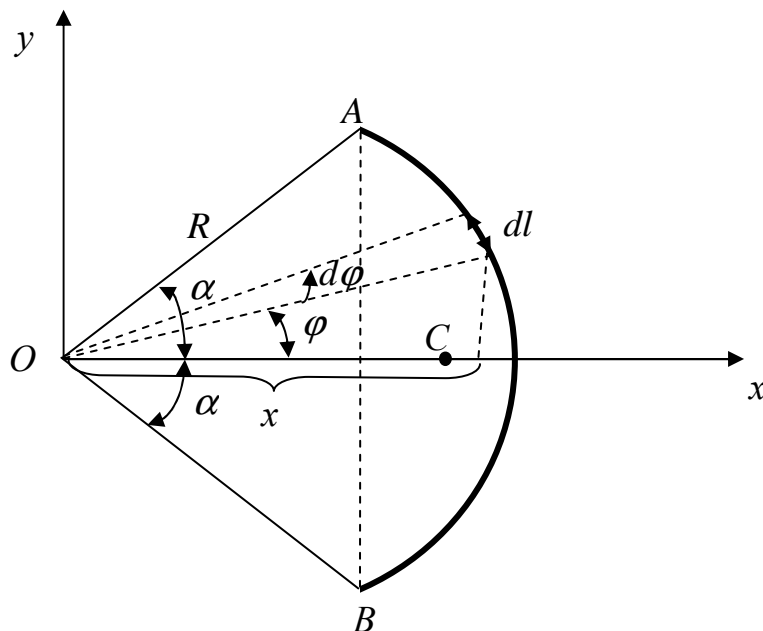
#### а) трикутник



Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник  $ABD$  на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні  $AD$ . Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник, центр симетрії якого лежить у середині, тобто на медіані

$BK$  трикутника. Розглядаючи смужки, паралельні стороні  $BD$ , приходимо до висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані  $AL$ . Отже, центр ваги трикутника знаходиться у точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожную із медіан у відношенні  $1:2$ , тобто  $CK : CB = 1 : 2$ ,  $CL : CA = 1 : 2$ .

#### б) дуга кола



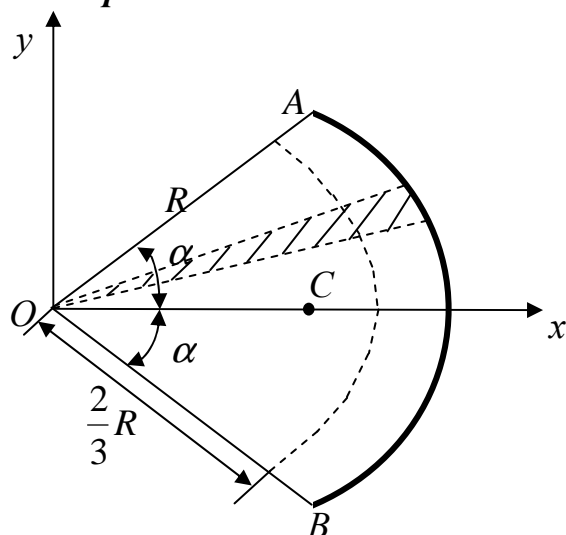
Розглянемо дугу  $AB$  кола радіусом  $R$  з центральним кутом  $2\alpha$ . Направимо вісь  $Ox$  по осі симетрії дуги, яка є бісектрисою кута  $2\alpha$ . Центр ваги дуги кола лежить на осі симетрії, тобто  $y_c = 0$ , і залишається знайти  $x_c$ . Для цього скористаємось формулою

$$x_c = \frac{\int_A^B x dl}{L}$$

Для елементарної частки довжини  $dl$ , як виходить з рис.,  $x = R \cos \varphi$ ,  $dl = R d\varphi$ ,  $L = R \cdot 2\alpha$ . Тоді

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin \alpha \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 2 \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

**в) коловий сектор**



Розглянемо коловий сектор з центральним кутом  $2\alpha$  і радіусом  $R$ . Направимо вісь  $Ox$  по осі симетрії сектора, яка є бісектрисою кута  $2\alpha$ . Центр ваги сектора лежить на осі симетрії, тобто  $y_c = 0$ . Розіб'ємо коловий сектор на елементарні сектори (заштрихований на рис.), кожен з котрих можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані  $\frac{2}{3}R$  від початку координат. Геометричним місцем центрів ваги всіх елементарних трикутників буде дуга кола радіусом  $\frac{2}{3}R$ . У цьому випадку можна скористатись формулою для центра ваги дуги кола:

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

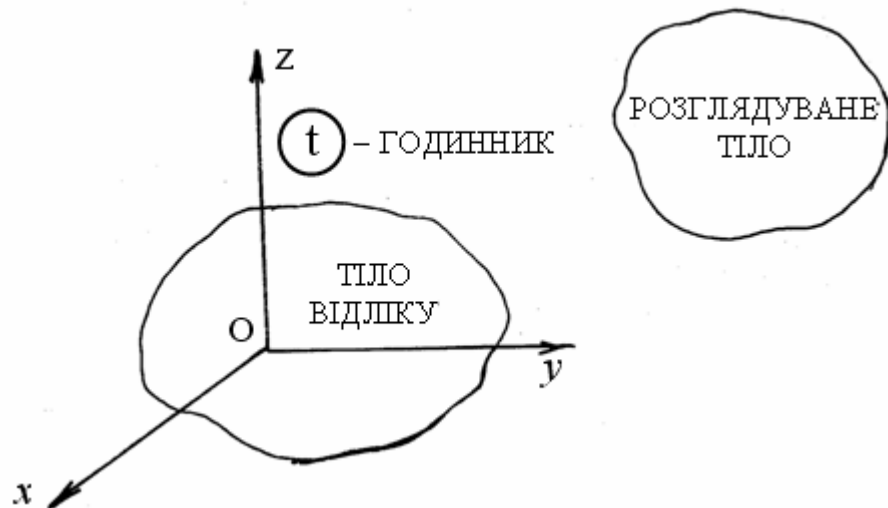
*Зауваження.* У формулах кут  $\alpha$  треба брати в радіанах.

## 2 КІНЕМАТИКА

**Кінематика** – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух тіл з геометричної точки зору, тобто без урахування їх маси та сил, що діють на ці тіла.

**Механічний рух** – це зміна зі спливанням часу положення одного тіла відносно іншого (відносно тіла відліку).

**Система відліку** – сукупність системи координат, яка жорстко зв'язана з тілом відліку, і годинника, за яким відлічується час.



**Основна задача кінематики** – за законом руху даного тіла визначити кінематичні характеристики цього руху, тобто траєкторії різних точок тіла, їх швидкості та прискорення.

**Найпростіший об'єкт кінематики** – точка – це тіло, розмірами якого можна нехтувати у порівнянні з характерними відстанями задачі.

### 2.1 Кінематика точки

**Траєкторія точки** – неперервна лінія, яку описує рухома точка відносно даної системи відліку.

**Задати рух або закон руху точки** – означає указати спосіб, за яким можна визначити положення точки відносно даної системи відліку в будь-який момент часу.

Для завдання руху точки і визначення її кінематичних характеристик можна застосувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

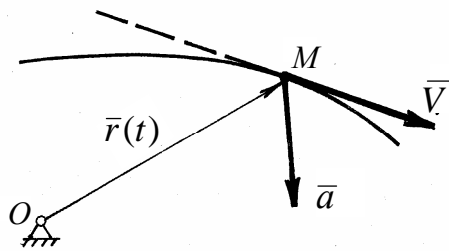
#### 2.1.1 Векторний спосіб

В даному випадку  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  – закон руху (рівняння руху точки у векторній формі), де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки (вектор, проведений із нерухомої точки О до розглядуваної);

$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  – швидкість точки – векторна величина, яка:

- 1) дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом;
- 2) напрямлена по дотичній до траєкторії точки у бік її руху;
- 3) характеризує швидкість зміни положення точки за часом;

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  або  $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$  – прискорення точки – векторна величина, яка:



- 1) дорівнює першій (другій) похідній швидкості (радіуса-вектора) точки за часом;
- 2) напрямлена у бік угнутості траєкторії точки;
- 3) характеризує швидкість зміни швидкості точки за часом.

### 2.1.2 Координатний спосіб

При даному способі завдання руху  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$  – закон руху (рівняння руху точки у координатній формі), де  $x, y, z$  – декартові координати точки.

Між векторним і координатними способами завдання руху точки існує такий зв'язок:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k},$$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \text{ – швидкість точки,}$$

де  $v_x, v_y, v_z$  – координатні складові швидкості точки;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти осей координат.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \text{ – модуль (величина) швидкості;}$$

$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ;  $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ ;  $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$  – проекції вектора швидкості на осі координат;

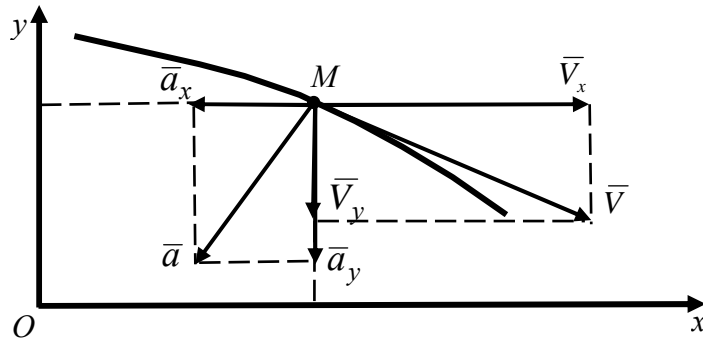
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ – прискорення точки,}$$

де  $a_x, a_y, a_z$  – координатні складові прискорення точки;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ – модуль (величина) прискорення точки,}$$

$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$ ;  $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ ;  $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$  – проекції вектора прискорення на осі координат.

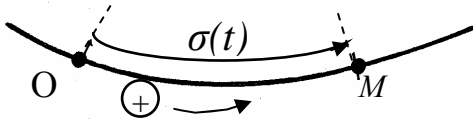
У випадку плоскої траєкторії рисунок може бути, наприклад, таким:



### 2.1.3 Натуральний спосіб

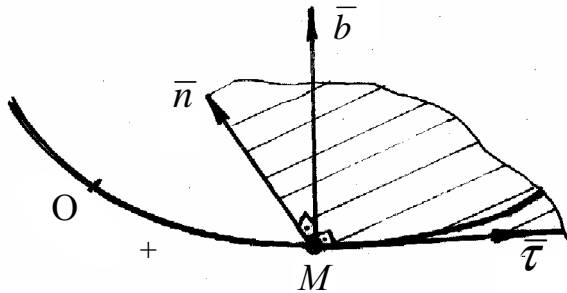
При натуральному способі завдання руху відомими є:

- а) траєкторія руху точки;
- б) початок і напрямок відліку руху точки;
- в)  $\sigma = \sigma(t)$  – закон руху (рівняння руху точки в натуральній формі),



де  $\sigma$  – дугова координата (криволінійна координата, яка відлічується уздовж траєкторії).

При натуральному способі застосовується натуральна система координат: вісь *дотичної*  $\tau$  – напрямлена по дотичній до траєкторії у даній точці в бік додатного напрямку відліку дугової координати; вісь *головної нормалі*  $n$  лежить у стичній площині і напрямлена перпендикулярно до дотичної у бік угнутості траєкторії; вісь *бінормалі*  $b$  – доповнює систему координат



до просторової, тобто перпендикулярна площині  $\tau Mn$ , так що її орт дорівнює  $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$ ,

де  $\bar{\tau}, \bar{n}$  – орти дотичної та головної нормалі;  $\bar{V} = \bar{V}_\tau = v_\tau \cdot \bar{\tau}$  – швидкість точки;  $\bar{V}_\tau$  – складова швидкості точки уздовж дотичної (завжди збігається з вектором швидкості);

$v_\tau = \dot{\sigma}$  – проекція швидкості  $\bar{V}$  точки на вісь дотичної;

$v = |\bar{V}|$  – модуль (величина) швидкості;

$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n}$  – прискорення точки,

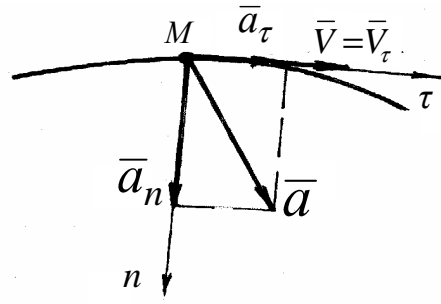
де  $\bar{a}_\tau, \bar{a}_n$  – складові прискорення точки уздовж осей  $\tau$  і  $n$ ;

$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{\sigma}$  – проекція прискорення точки на вісь дотичної (називається *дотичним прискоренням*), характеризує швидкість зміни модуля швидкості точки за часом;

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$  – проекція прискорення точки на вісь головної нормалі;

де  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії в даній точці (називається *нормальним*

прискоренням) характеризує бистроту зміни напрямку вектора швидкості точки за часом;  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$  – модуль (величина) прискорення.



Зв'язок між натуральним і координатним способами завдання руху:

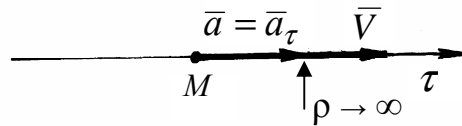
$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V};$$

$$a_n = \sqrt{\frac{(V_x a_y - V_y a_x)^2 + (V_z a_x - V_x a_z)^2 + (V_y a_z - V_z a_y)^2}{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}};$$

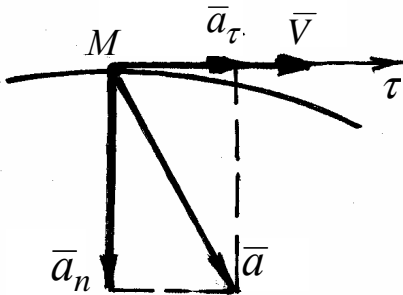
$$\rho = \frac{\bar{V}^2}{a_n} = \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{a_n}.$$

#### 2.1.4 Особливі випадки

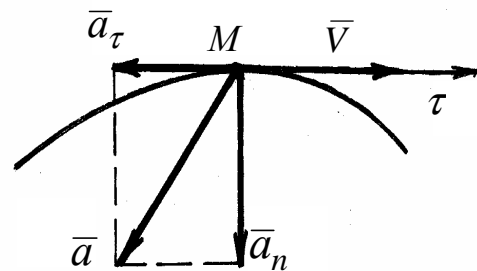
1) Прямолінійний рух: у цьому випадку  $\bar{a}_n = 0$ ,  $\bar{a} = \bar{a}_\tau$ , радіус кривизни  $\rho = \infty$ .



2) Криволінійний рух: у цьому випадку  $\bar{a}_n \neq 0$ ,  $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$ .



Прискорений рух, напрямки  $\bar{V}$  і  $\bar{a}_\tau$  збігаються, знаки проєкцій  $\bar{V}$  і  $\bar{a}_\tau$  однакові.



Сповільнений рух, напрямки  $\bar{V}$  і  $\bar{a}_\tau$  протилежні, знаки проєкцій  $\bar{V}$  і  $\bar{a}_\tau$  різні.

3) Рівнозмінний рух:  $a_\tau = \text{const} \neq 0$  (рівноприскорений, якщо  $v_\tau$  і  $a_\tau$  мають однакові знаки і рівносповільнений – якщо різні).

У цьому випадку  $v_\tau = a_\tau \cdot t + v_{o\tau}$ ,

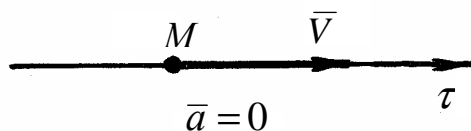
$$\sigma = a_\tau \frac{t^2}{2} + v_{o\tau} \cdot t + \sigma_0,$$

де  $\sigma_0, v_{o\tau}$  – початкові координата і швидкість точки;

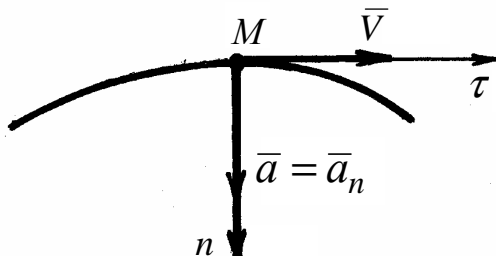
4) Рівномірний рух:  $\bar{a}_\tau = 0$ , у цьому випадку  $\bar{a} = \bar{a}_n$ ,

$$v_\tau = v_{o\tau} = \text{const},$$

$$\sigma = v_{o\tau} \cdot t + \sigma_0,$$



Рівномірний прямолінійний рух.



Рівномірний криволінійний рух.

### 2.1.5 Приклад розрахунку

За заданими рівняннями руху точки ( $x, y$  – у сантиметрах)

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t - 3t^2 \end{cases}$$

визначити її траєкторію, швидкість, прискорення, дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії в момент часу, коли точка знаходиться на осі  $OX$ . Одержані результати зобразити на рисунку.

#### Розв'язання.

1. Визначимо траєкторію руху точки. Для цього виключимо параметр часу  $t$  з рівнянь руху. Виразимо з рівнянь руху:

$$t = \frac{x}{3};$$

$$y = 4 \frac{x}{3} - 3 \frac{x^2}{3^2};$$

$$y = \frac{4x - x^2}{3}.$$

Отже, рівнянням траєкторії є парабола. Зобразимо параболу на рисунку в системі координат  $Oxy$ .

2. Знайдемо положення точки на траєкторії, коли ордината  $y = 0$ :

$$4t - 3t^2 = 0;$$

$$t(4 - 3t) = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння:  $t_1 = 0$ ;  $t_2 = \frac{4}{3}c$ . Визначимо координату  $x$

в момент часу  $t = \frac{4}{3}c$ :



$$x = 3t = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ (см)}.$$

Зобразимо точку  $M_1$  з координатами (4; 0) на траєкторії.

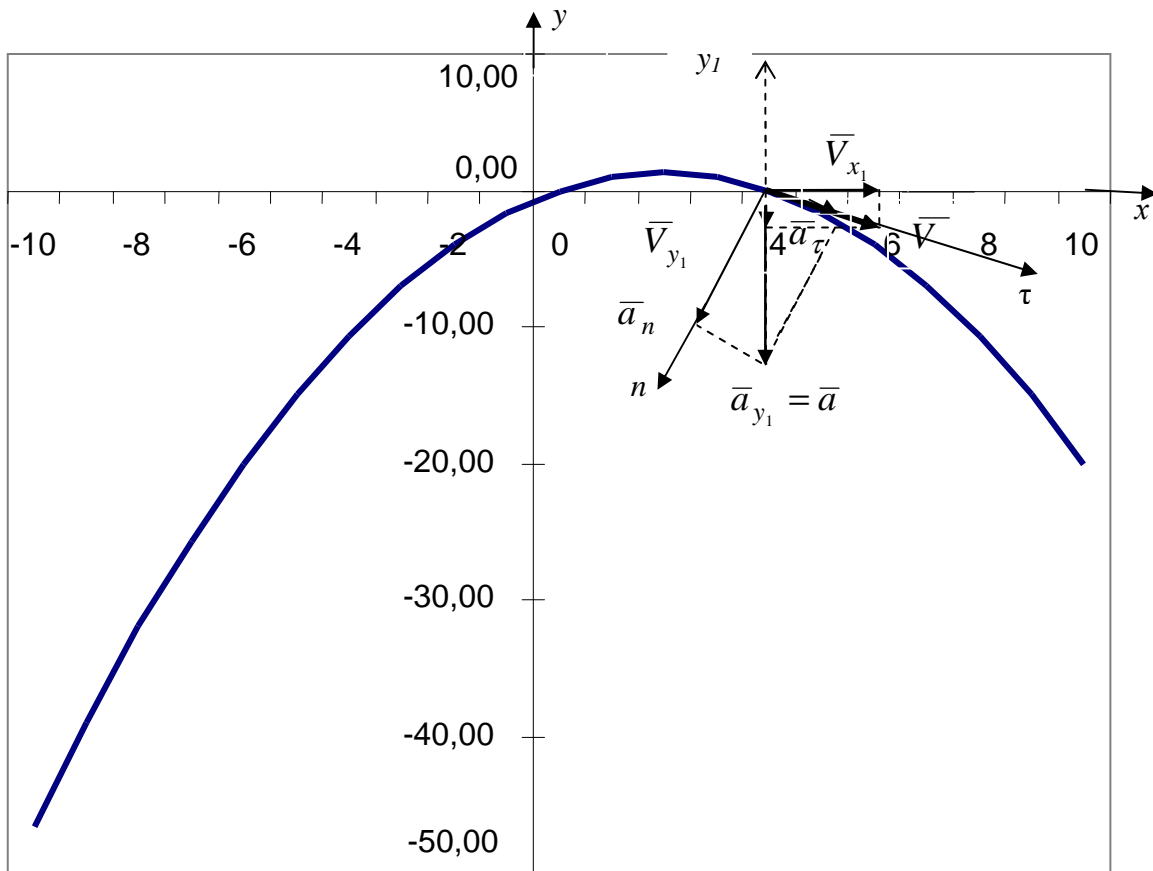
3. Знайдемо швидкість точки  $M_1$ . Для цього спочатку визначимо проекції швидкості на осі координат  $x_1, y_1$ :

$$v_{x_1} = \dot{x} = 3 \text{ (см/с)};$$

$$v_{y_1} = \dot{y} = 4 - 3 \cdot 2t = 4 - 6t.$$

Для заданого моменту часу

$$v_{y_1} = 4 - 6 \cdot \frac{4}{3} = 4 - 8 = -4 \text{ (см/с)}.$$



Зобразимо складові швидкості  $\bar{v}_{x_1}, \bar{v}_{y_1}$  на рисунку, відкладаючи їх з точки  $M_1$ , відповідно зі знаками проєкцій  $v_{x_1}, v_{y_1}$  у масштабі швидкостей (визначимо, що він може і не збігатися з масштабом віддалей). Проєкція  $v_{x_1}$  додатна, тому складову  $v_{x_1}$  відкладаємо у напрямку додатного відліку координати  $x$ . Проєкція  $v_{y_1}$  від'ємна, тому складову  $v_{y_1}$  відкладаємо у напрямку від'ємного відліку координати  $y$ . Вектор швидкості  $\bar{v}_1$  зображаємо діагоналлю прямокутника, побудованого на складових  $\bar{v}_{x_1}, \bar{v}_{y_1}$  як на сторонах. При пра-

вильних розрахунках та побудовах вектор швидкості  $\vec{v}$  повинен бути напрямленим по дотичній до траєкторії в точці  $M_I$ .

За величиною швидкість точки  $M_I$  дорівнює:

$$v_I = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ (см/с)}.$$

4. Знайдемо прискорення точки. Визначимо спочатку проекції прискорення на осі координат:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= \dot{v}_{x_1} = 0; \\ a_{y_1} &= \dot{v}_{y_1} = -6 \text{ (см/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Зобразимо складові прискорення  $a_{x_1}, a_{y_1}$  на рисунку, відкладаючи їх з точки  $M_I$  відповідно зі знаками проекцій  $a_{x_1}, a_{y_1}$  у масштабі прискорень (який може і не збігатися з масштабом швидкостей та віддалей). Проекція  $a_{y_1}$  від'ємна, тому складову  $a_{y_1}$  відкладаємо у напрямку від'ємного відліку координати  $y$ . Вектор прискорення  $a_I$  зображаємо діагоналлю прямокутника, побудованого на складових  $a_{x_1}, a_{y_1}$  як на сторонах. При правильних розрахунках та будуваннях вектор прискорення  $a_I$ , повинен бути напрямленим в бік угнутості траєкторії.

Величину прискорення точки в положенні  $M_I$  визначимо як:

$$a_I = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

5. Знайдемо дотичне прискорення точки:

$$a_\tau = \frac{v_{x_1} \cdot a_{x_1} + v_{y_1} \cdot a_{y_1}}{v}.$$

Для заданого моменту часу

$$a_{\tau_1} = \frac{3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-6)}{5} = 4,8 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

**Зауваження 1.** При визначенні  $a_{\tau_1}$  було враховано, що  $v_{\tau_1} = v_I$ , тому що величина швидкості  $v_I$  не містить в собі знак модуля.

**Зауваження 2.** При визначенні  $a_{\tau_1}$  за допомогою проекцій  $v_{x_1}, v_{y_1}, a_{x_1}, a_{y_1}$  краще використовувати точні значення цих величин, а не приблизні.

6. Знайдемо нормальне прискорення точки:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Для заданого моменту часу  $t = \frac{4}{3} \text{ с}$  отримаємо

$$a_{n_1} = \sqrt{a^2 - a_{\tau_1}^2} = \sqrt{6^2 - 4,8^2} = 3,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

На рисунку дотичне й нормальне прискорення можна побудувати, якщо провести осі дотичної  $\tau$  (яку можна побудувати як продовження вектора швидкості  $\vec{v}_I$ ) та головної нормалі  $n$  (що перпендикулярна осі  $\tau$  і напрямлена

в бік угнутості траєкторії) і спроектувати вектор прискорення на ці осі. Величини проєкцій  $a_{\tau_1}, a_{n_1}$ , що виміряні з рисунка (з урахуванням масштабу), повинні збігатися зі значеннями, визначеними за формулами.

7. Радіус кривизни траєкторії визначимо за формулою:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Для заданого моменту часу:

$$\rho_1 = \frac{5^2}{3,6} = 6,9 \text{ (см)}.$$

**Висновок:** Точка рухається уздовж параболи за стрілкою годинника (на це указує напрямок вектора швидкості  $\vec{v}_1$ ) прискорено, оскільки  $\vec{a}_\tau \neq \text{const}, \vec{a}_\tau \geq 0$ . При цьому лінія вектора прискорення напрямлена до центру угнутості.

**Відповідь:** В момент часу  $t = \frac{4}{3} \text{ с}$  точка має наступні кінематичні характеристики:

$$x_1 = 4 \text{ см}; y_1 = 0 \text{ см}; v_1 = 5 \text{ см/с}; a_1 = 6 \text{ см/с}^2; a_{\tau 1} = 4,8 \text{ см/с}^2; \\ a_{n1} = 3,6 \text{ см/с}^2; \rho_1 = 6,9 \text{ см}.$$

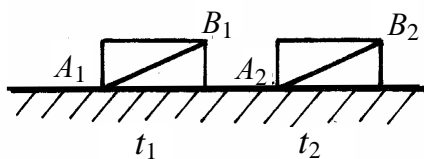
## 2.2 Кінематика твердого тіла

### 2.2.1 Поступальний рух твердого тіла

**Поступальним** називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною самій собі.

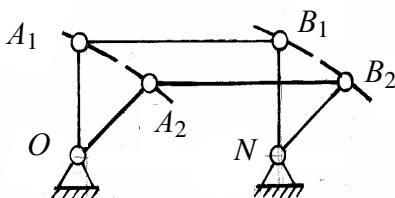
**Приклади:**

1)



– тіло ковзає по прямолінійній поверхні, траєкторії точок – прямі лінії;

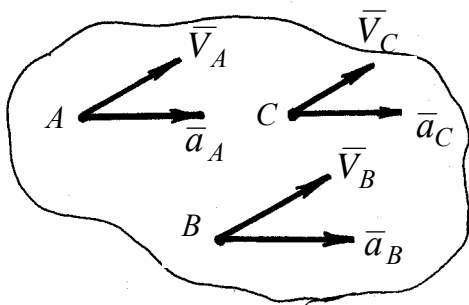
2)



– спарник  $AB$  при обертанні стержнів  $OA$  та  $NB$  ( $OA = NB$ ), траєкторії точок – кола.

**Теорема** про траєкторії, швидкості й прискорення точок твердого тіла при поступальному русі:

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однако-ві траєкторії, мають у будь-який час геометрично рівні швидкості й прискорення.



На рисунку:

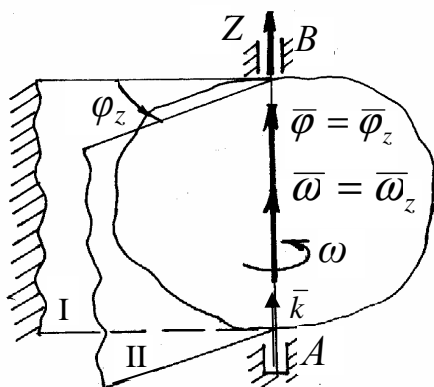
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \dots$$

Тому поступальний рух твердого тіла можна визначити, вивчивши рух тільки однієї його точки (здебільшого це центр мас).

### 2.2.2 Обертання твердого тіла

**Обертанням** навколо нерухомої осі називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки цього тіла залишаються під час руху нерухомими.



Пряма, що проходить через ці нерухомі точки, називається **віссю обертання**.

На рисунку:

I – нерухома площина,

II – площина, яка жорстко скріплена з тілом і обертається разом з ним.

Двогранний кут між площинами I і II –  $\varphi_z$  – називається *кутом повороту* тіла.

$\varphi_z = \varphi(t)$  закон обертання (рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі z). Вимірюється кут у радіанах:  $[\varphi] = \text{рад}$ .

$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$  – вектор кутової швидкості, напрямлений уздовж осі обертання z у той бік, звідки обертання тіла видно проти стрілки годинника, характеризує швидкість зміни кута повороту тіла (на рисунках його часто зображують у вигляді стрілки, яка показує напрям обертання);

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z = \omega_z \cdot \vec{k},$$

де  $\vec{k}$  – орт осі z;  $\omega_z = \dot{\varphi}_z$  – проекція кутової швидкості на вісь обертання z;  $\omega = |\omega_z|$  – модуль (величина) кутової швидкості.

Кутова швидкість вимірюється у радіанах за секунду:  $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$ .

$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$  – вектор кутового прискорення, напрямлений уздовж осі обертання, характеризує швидкість зміни кутової швидкості за часом;

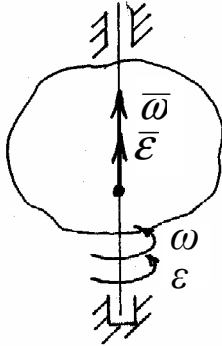
$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_z = \varepsilon_z \cdot \vec{k},$$

$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z$  – проекція кутового прискорення на вісь обертання;

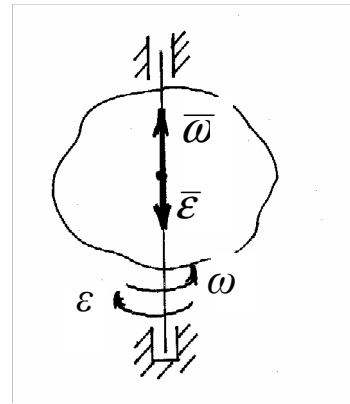
$\varepsilon = |\varepsilon_z|$  – модуль (величина) кутового прискорення.

Кутове прискорення вимірюється у радіанах за секунду в квадраті:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}.$$



Прискорене обертання,  
напрямки  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  збігаються



Сповільнене обертання,  
напрямки  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  протилежні

### Особливі випадки:

1) Рівнозмінне обертання:  $\varepsilon_z = \text{const} \neq 0$  (рівноприскорене, якщо  $\omega_z$  і  $\varepsilon_z$  мають однакові знаки, і рівносповільнене, якщо різні).

У цьому випадку  $\omega_z = \varepsilon_z \cdot t + \omega_{0z}$ ,

$$\varphi_z = \varepsilon_z \frac{t^2}{2} + \omega_{0z} \cdot t + \varphi_{0z},$$

де  $\varphi_{0z}, \omega_{0z}$  – початкові кут повороту та кутова швидкість.

2) Рівномірне обертання:  $\varepsilon_z = 0$ .

У цьому випадку  $\omega_z = \omega_{0z} = \text{const}$ ,

$$\varphi_z = \omega_{0z} \cdot t + \varphi_{0z}.$$

Кут повороту можна виразити через число обертів  $N$  тіла за весь період обертання:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Кутову швидкість у техніці часто задають числом обертів за хвилину  $n$ :

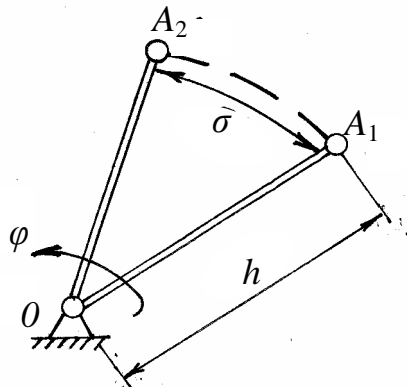
$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

**Формули**, за допомогою яких визначають **кінематичні величини** будь-якої точки тіла:

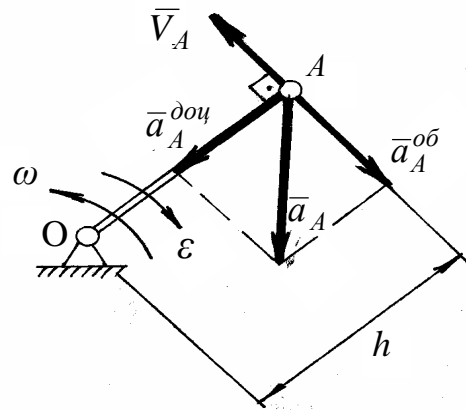
$\sigma = \varphi \cdot h$  – дугова координата точки по колу;

$h$  – відстань від даної точки  $A$  до осі обертання;

$v_A = \omega \cdot h$  – модуль лінійної швидкості точки  $A$ , вектор  $\bar{v}_A \perp h$  і напрямлений у напрямку дугової стрілки кутової швидкості  $\omega$ ;



$a_A^{ob} = \varepsilon \cdot h$  – обертальне прискорення точки  $A$ ; вектор  $\bar{a}_A^{ob} \perp h$  і напрямлений у напрямку дугової стрілки кутового прискорення  $\varepsilon$ ;

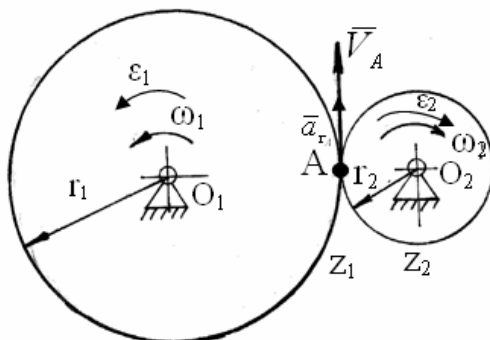


$a_A^{доу} = \omega^2 \cdot h$  – доцентрове прискорення точки  $A$ , вектор  $\bar{a}_A^{доу}$  напрямлений вздовж відрізка  $OA$  від точки  $A$  до нерухомої точки  $O$ ;

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{ob} + \bar{a}_A^{доу};$$

$a_A = \sqrt{(a_A^{ob})^2 + (a_A^{доу})^2}$  – модуль (величина) прискорення точки  $A$ .

### 2.2.3 Передача обертального руху

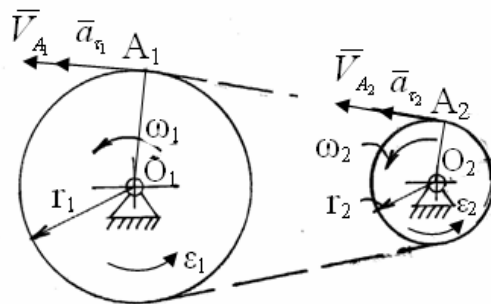


Тут для зубчастої передачі

$$V_{A_1} = V_{A_2} = V_A$$

$$\text{або } \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

$$\text{Звідси } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$



Для ремінної передачі

$$a_{\tau_1} = a_{\tau_2} = a_{\tau A}.$$

$$\text{або } \varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2.$$

$$\text{Тут } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

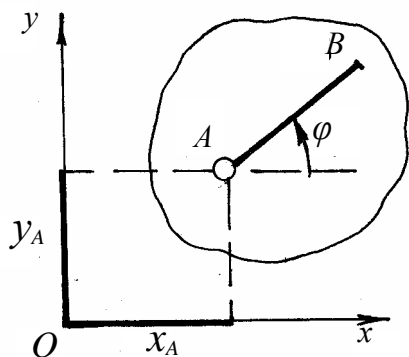
У зубчастих колесах числа зубців  $z$  пропорційні радіусам коліс, тому виконується співвідношення:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

### 2.2.4 Плоскопаралельний рух твердого тіла

**Плоскопаралельним** називають такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

Вивчення плоскопаралельного руху можна звести до вивчення руху плоскої фігури в її площині, або відрізка прямої цієї фігури. Положення фігури в даний момент часу визначається координатами довільної її точки  $A$ , яку називають полюсом, і кутом  $\varphi$  повороту фігури навколо полюса.



Рівняння руху плоскої фігури мають вигляд:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = \varphi(t),$$

де  $A$  – точка, яку вибрано в якості полюса.

Перші два рівняння характеризують поступальний рух фігури, при якому всі точки фігури рухаються так само, як і полюс, а третє – обертальний рух навколо полюса.

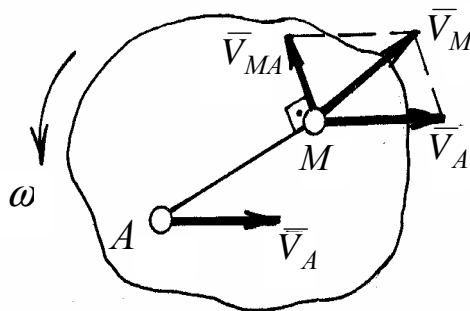
Кутова швидкість і кутове прискорення обертального руху фігури не залежать від вибору полюса.

**Теорема** про швидкості точок плоскої фігури:

Лінійна швидкість будь-якої точки  $M$  фігури при її плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкості  $\bar{v}_A$  полюса  $A$  і швидкості  $\bar{v}_{MA}$  точки  $M$  в її обертальному русі навколо полюса:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}.$$

При цьому  $v_{MA} = \omega \cdot MA$ ,  
де  $\omega$  – кутова швидкість фігури;  
а швидкість  $\bar{v}_{MA} \perp MA$ .

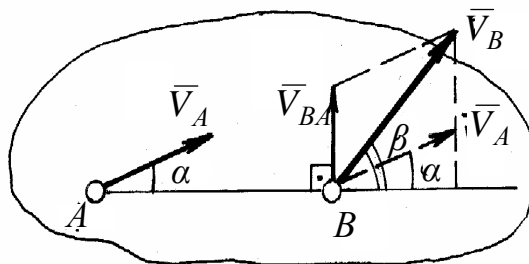


**Теорема** про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури: При плоскому русі фігури проекції швидкостей кінців  $A$  і  $B$  відрізка  $AB$  на його напрям рівні між собою:

$$Pr_{AB}(\bar{v}_A) = Pr_{AB}(\bar{v}_B)$$

$$\text{або } v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta;$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – кути між  $\bar{v}_A$  і  $\bar{v}_B$  і напрямом відрізка  $AB$  відповідно.



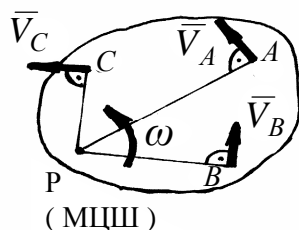
Плоский рух тіла у даний момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвого центра обертання, або миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

**Миттєвий центр швидкостей** – це точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

**Визначення** положення МЦШ та з його допомогою кутової швидкості фігури і швидкості будь-якої точки фігури:

Методи визначення МЦШ

1.



У загальному випадку МЦШ лежить в точці перетину перпендикулярів, проведених з двох точок плоскої фігури до їх швидкостей. Кутова швидкість  $\omega$  плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані від МЦШ:

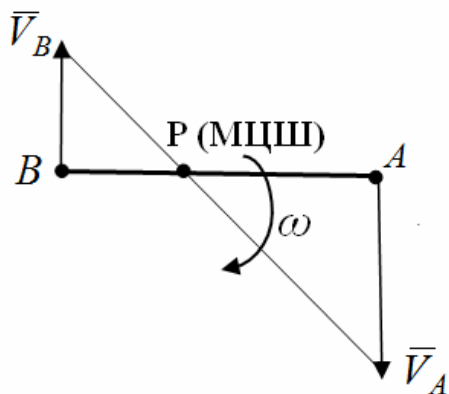
$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

Тому швидкість будь-якої точки плоскої фігури у кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості  $\omega$  на відстань від даної точки до МЦШ:

$$\begin{aligned} V_C &= \omega \cdot CP \quad (\bar{V}_B \perp BP); \\ V_B &= \omega \cdot BP \quad (\bar{V}_C \perp CP) \end{aligned} \quad \text{і т.п.}$$

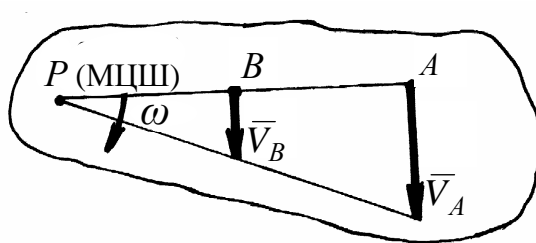
2. Якщо  $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B, \bar{V}_A \perp AB$

а)



$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

б)

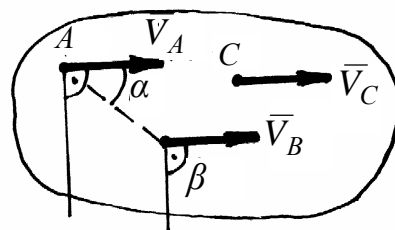


$$\omega = \frac{V_A}{AB + BP} = \frac{V_B}{BP}$$

3. При  $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B, \alpha \neq \pi/2$

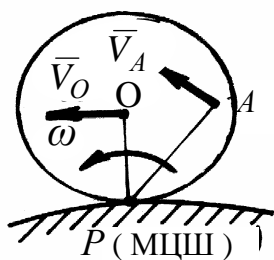
$$\text{МЦШ} \rightarrow \infty, \quad \omega = \frac{V_A}{\infty} = 0,$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}_C.$$



Це випадок миттєво-поступального руху.





4. Фігура котиться без ковзання по нерухомій поверхні. В цьому випадку МЦШ знаходиться в точці дотику фігури з поверхнею,

$$\omega = \frac{V_0}{OP}, \quad V_A = \omega \cdot AP.$$

**Теорема** про прискорення точок плоскої фігури:

Прискорення будь-якої точки  $M$  фігури при її плоскому русі дорівнює геометричній сумі прискорень полюса  $A$  і прискорення точки  $M$  в її обертовому русі навколо полюса:

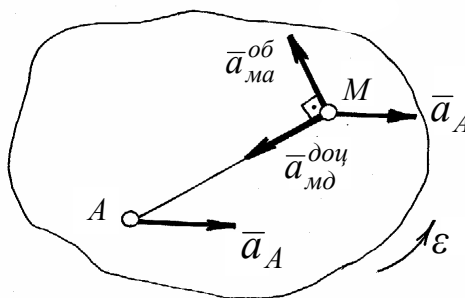
$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA},$$

або, оскільки

$$a_{MA} = a_{MA}^{\text{доц}} + a_{MA}^{\text{об}},$$

$$a_M = a_A + a_{MA}^{\text{доц}} + a_{MA}^{\text{об}}, \quad \text{де} \quad a_{MA}^{\text{доц}} = \omega^2 \cdot MA, \quad a_{MA}^{\text{об}} = \varepsilon \cdot MA,$$

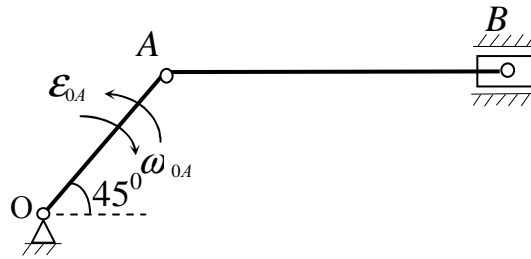
при цьому  $\bar{a}_{MA}^{\text{об}} \perp MA$  і напрямлене відповідно зі стрілкою  $\varepsilon$ ,  $\bar{a}_{MA}^{\text{доц}}$  напрямлене уздовж відрізка  $MA$  від точки  $M$  до точки  $A$ .



### 2.2.5 Кінематичний аналіз плоского механізму

При розв'язанні задач треба послідовно розглянути рух окремих ланок механізму і провести розрахунок кожної з них (визначити швидкість і прискорення точки, яка належить одночасно до розглядуваної і поступової ланки). Розрахунок почати з ланки, рух якої є заданим. Якщо ланка виконує обертальний рух (у неї є нерухома точка, наприклад, у вигляді нерухомого шарніра), то будь-яка її точка рухається за колом і для визначення швидкості і прискорення цієї точки треба використовувати формули параграфа 2.2.2. Якщо ланка виконує плоскопаралельний рух (немає нерухомої точки), треба використовувати формули параграфа 2.2.4.

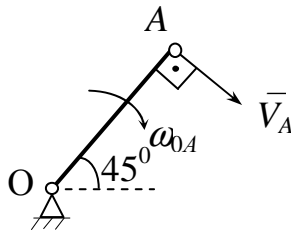
**Приклад 1.** Плоский механізм складається з кривошипа  $OA$ , шатуна  $AB$  і повзуна  $B$ . Тут  $OA = 20$  см,  $AB = 40$  см. Кривошип  $OA$  має у даний момент часу кутову швидкість  $\omega_{OA} = 2$  рад/с і кутове прискорення  $\varepsilon_{OA} = 5$  рад/с<sup>2</sup>. Для заданого положення механізму треба визначити швидкість і прискорення точки  $B$ , а також кутові швидкість і прискорення шатуна  $AB$ .



### Розв'язання.

#### 1. Визначимо швидкість точки B.

1) Спочатку розглянемо кривошип  $OA$ , рух якого є заданим.

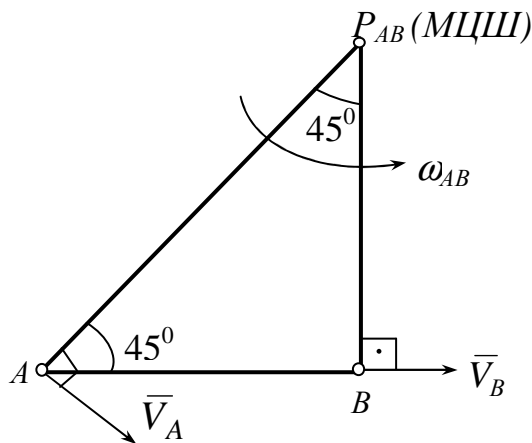


Він виконує обертальний рух навколо нерухомої точки  $O$ , тому швидкість точки  $A$  визначається за формулою

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ (см/с)}.$$

Вектор  $\vec{V}_A \perp OA$  і напрямлений у бік обертання стержня (за «стрілкою»  $\omega_{OA}$ ).

2) Розглянемо шатун  $AB$ . Він виконує плоскопаралельний рух,



тому спочатку треба побудувати його МЦШ. Швидкість точки  $A$  знайдена при розрахунку стержня  $OA$ . Точка  $B$  належить повзуну, тому лінія дії її швидкості  $\vec{V}_B$  паралельна напрямку руху повзуна. Будуємо МЦШ (точка  $P_{AB}$ ) як точку перетину перпендикулярів до швидкості  $\vec{V}_A$  і швидкості точки  $B$ , що є горизонтальною (напрявлена по дотичній до траєкторії).

Кутова швидкість шатуна  $AB$  дорівнює:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{V_A}{AB / \cos 45^\circ} = \frac{V_A \cdot \cos 45^\circ}{AB} = \frac{40 \cdot 0,7}{40} = 0,7 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$$

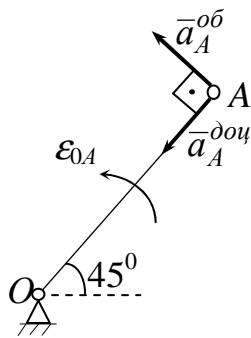
і напрямлена відповідно до того, як вектор  $\vec{V}_A$  „обертається” навколо МЦШ ( $P_{AB}$ ). Швидкість точки  $B$  буде

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 0,7 \cdot 40 = 28 \text{ (см/с)}$$

і напрямлена згідно зі «стрілкою»  $\omega_{AB}$ .

#### 2. Визначимо далі прискорення точки B.

1) Розглянемо кривошип  $OA$ . Він виконує обертальний рух, тому модулі складових прискорення точки  $A$  визначаються за формулами:



$$a_A^{\text{доц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \cdot 20 = 80 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_A^{\text{об}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 20 = 100 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Покажемо напрямки складових: вектор  $\vec{a}_A^{\text{доц}}$  напрямлений уздовж стержня від точки  $A$  до центра обертання  $O$ , вектор  $\vec{a}_A^{\text{об}} \perp OA$

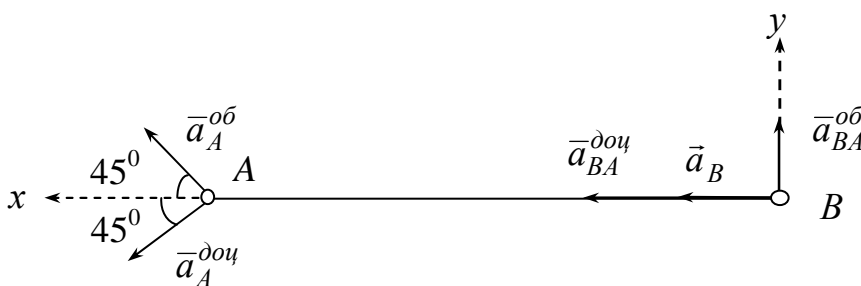
направлений згідно зі «стрілкою»  $\varepsilon_{OA}$ .

2) Розглянемо шатун  $AB$ . Він виконує плоскопаралельний рух, тому прискорення точки  $B$  визначається за формулою:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^{\text{доц}} + \vec{a}_A^{\text{об}} + \vec{a}_{BA}^{\text{доц}} + \vec{a}_{BA}^{\text{об}}.$$

Модуль складової  $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$  обчислюємо за формулою:

$$a_{BA}^{\text{доц}} = \omega_{AB}^2 \cdot BA = 0,7^2 \cdot 40 = 20 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$



Вектор  $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$  напрямлений по відрітку  $BA$  від точки  $B$  до полюса  $A$ . Модуль складової  $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$  обчислити поки не можна, тому що не-

відоме  $\varepsilon_{AB}$ . У цьому разі зобразимо вектор  $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}} \perp BA$  і направимо у будь-який бік (наприклад, угору). Оскільки траєкторія точки  $B$  - пряма лінія, то вектор  $\vec{a}_A$  мусить мати напрямок уздовж цієї прямої. Зобразимо його, наприклад, вліво від точки  $B$ .

Виберемо осі координат  $x, y$  (наприклад, вісь  $x$  спрямуємо за стержнем вліво, вісь  $y$  - угору) і спроектуємо векторне рівняння для визначення прискорення на ці осі:

$$x: \quad a_B = a_A^{\text{доц}} \cdot \cos 45^\circ + a_A^{\text{об}} \cdot \cos 45^\circ + a_{BA}^{\text{доц}},$$

$$y: \quad 0 = -a_A^{\text{доц}} \cdot \sin 45^\circ + a_A^{\text{об}} \cdot \sin 45^\circ + a_{BA}^{\text{об}}.$$

В отриманій системі алгебраїчних рівнянь невідомими є модулі прискорень  $a_B$  і  $a_{BA}^{\text{об}}$ . З першого рівняння знаходимо прискорення точки  $B$ :

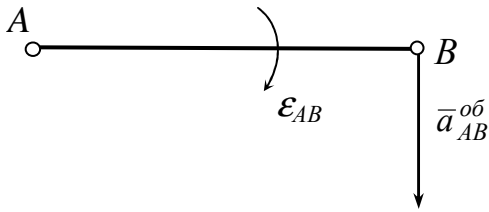
$$a_B = 80 \cdot 0,7 + 100 \cdot 0,7 + 20 = 146 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Оскільки  $a_B > 0$ , то вектор  $\vec{a}_B$  відповідає дійсному напрямку прискорення точки  $B$ . З другого рівняння знаходимо  $a_{BA}^{\text{об}}$ :

$$a_{BA}^{\text{об}} = a_A^{\text{доц}} \cdot \sin 45^\circ - a_A^{\text{об}} \cdot \sin 45^\circ = 56 - 70 = -14 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Знак «-» - означає, що насправді вектор  $\vec{a}_{BA}^{\text{об}} \perp BA$  і напрямлений униз. Кутове прискорення

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^{об}|}{BA} = \frac{14}{40} \approx 0,35 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)$$



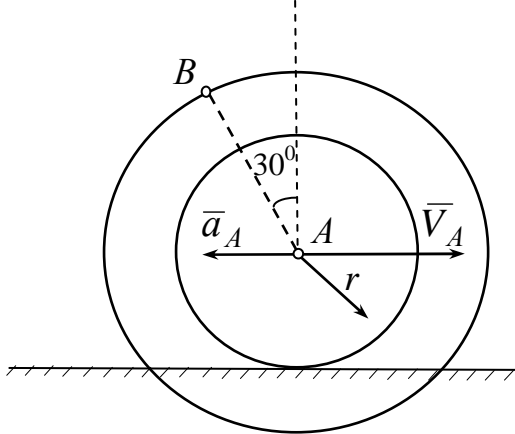
і напрямлена за стрілкою годинника (так, як дійсний вектор  $\vec{a}_{BA}^{об}$  «обертається» навколо полюса  $A$ ).

**Відповідь:**

$$\omega_{AB} = 0,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad V_B = 28 \text{ см/с};$$

$$\varepsilon_{AB} = 0,35 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; \quad a_B = 146 \text{ см/с}^2.$$

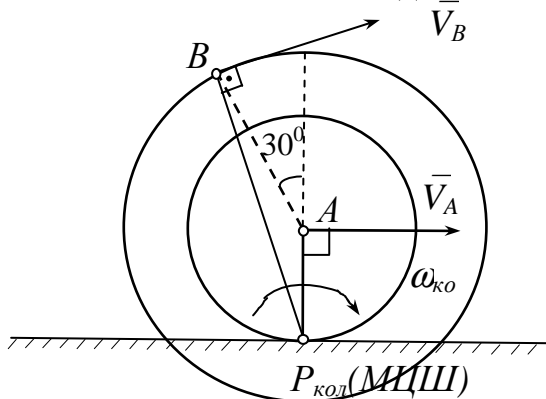
**Приклад 2.** Колесо  $A$  складається з двох жорстко скріплених між собою дисків. Диск радіуса  $r$  котиться без ковзання по нерухомій поверхні.



Тут  $AB = 15 \text{ см}$ ,  $r = 10 \text{ см}$ . Центр колеса  $A$  має у даний момент часу швидкість  $V_A = 28 \text{ см/с}$  і прискорення  $a_A = 146 \text{ см/с}^2$ . Для заданого положення колеса треба визначити його кутові швидкість і прискорення, а також швидкість і прискорення точки  $B$ .

**Розв'язання:**

1. Визначимо швидкість точки  $B$ .



Колесо, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні, виконує плоскопаралельний рух. МЦШ (точка  $P_{\text{кол}}$ ) знаходиться в точці дотику з нерухомою поверхнею. Кутова швидкість колеса

$$\omega_{\text{кол}} = \frac{V_A}{AP_{\text{кол}}} = \frac{28}{10} = 2,8 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$$

і напрямлена за стрілкою годинника (відповідно до «обертання» вектора  $\vec{V}_A$  навколо МЦШ ( $P_{\text{кол}}$ )).

Відрізок  $BP_{\text{кол}}$  можна визначити з трикутника  $ABP_{\text{кол}}$  за теоремою косинусів:

$$\begin{aligned} BP_{\text{кол}} &= \sqrt{AB^2 + AP_{\text{кол}}^2 - 2AB \cdot AP_{\text{кол}} \cdot \cos 150^\circ} = \\ &= \sqrt{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot (-0,85)} = \sqrt{580} \approx 24 \text{ (см)}, \end{aligned}$$

Тоді  $V_B = \omega_{\text{кол}} \cdot BP_{\text{кол}} = 2,8 \cdot 24 \approx 67,2 \text{ (см/с)}$ . Вектор  $\vec{V}_B \perp BP_{\text{кол}}$  і напрямлений згідно зі «стрілкою»  $\omega_{\text{кол}}$ .

2. Визначимо прискорення точки  $B$ .

Прискорення точки  $B$  колеса, яке виконує плоскопаралельний рух, визначається за формулою:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{доц}} + \vec{a}_{BA}^{\text{об}}.$$

Оскільки траєкторія точки  $B$  невідома (на неї не накладено обмежень з боку інших тіл), її прискорення будемо розшукувати у вигляді двох невідомих складових  $\vec{a}_{Bx}$ ,  $\vec{a}_{By}$ , напрямлених уздовж осей координат:

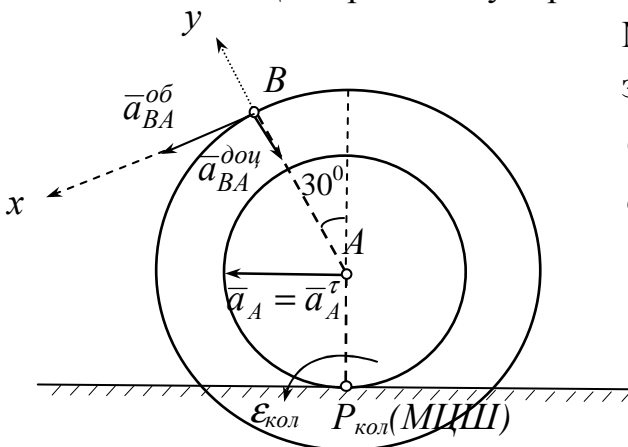
$$\vec{a}_{Bx} + \vec{a}_{By} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{доц}} + \vec{a}_{BA}^{\text{об}}.$$

Кутове прискорення колеса, що котиться, визначимо за формулою:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{кол}} &= \frac{d\omega_{\text{кол}}}{dt} = \frac{d(V_A / AP_{\text{кол}})}{dt} = \frac{1}{AP_{\text{кол}}} \frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^\tau}{AP_{\text{кол}}} = \frac{a_A}{AP_{\text{кол}}} = \frac{146}{10} = \\ &= 14,6 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right), \end{aligned}$$

де  $a_A^\tau = a_A$ , оскільки траєкторія точки  $B$  – пряма лінія.

Напрявлене  $\varepsilon_{\text{кол}}$  проти стрілки годинника (так, як вектор  $\vec{a}_A^\tau$  «обертається» навколо МЦШ проти ходу стрілки годинника).



Модулі складових  $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$  і  $\vec{a}_{BA}^{\text{об}}$  визначимо за формулами:

$$a_{BA}^{\text{доц}} = \omega_{\text{кол}}^2 \cdot BA = 2,8^2 \cdot 15 = 117,6 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_{BA}^{\text{об}} = \varepsilon_{\text{кол}} \cdot BA = 14,6 \cdot 15 = 219 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор  $\vec{a}_{BA}^{\text{доц}}$  напрямлений по відрітку  $BA$  від точки  $B$  до полюса  $A$ , а вектор  $\vec{a}_{BA}^{\text{об}} \perp BA$  і напрямлений згідно зі «стрілкою»  $\varepsilon_{\text{кол}}$ .

Побудуємо осі координат  $xu$  і споектуємо векторне рівняння для визначення прискорення  $\bar{a}_B$  на ці осі:

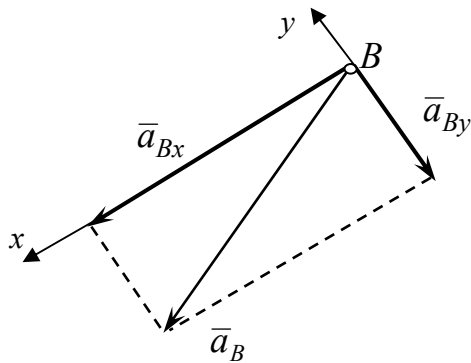
$$x: a_{Bx} = a_A \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^{об} = 146 \cdot 0,85 + 219 = 343,1 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$y: a_{By} = a_B \cdot \sin 30^\circ - a_{BA}^{доц} = 146 \cdot 0,5 - 117,6 = -44,6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Модуль прискорення точки  $B$  знаходимо за формулою

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(343,1)^2 + (-44,6)^2} \approx 346 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Оскільки  $a_{Bx} > 0, a_{By} < 0$ , то складова  $\bar{a}_{Bx}$  прискорення точки  $B$  напрямлена в бік додатного напрямку осі  $x$ , а складова  $\bar{a}_{By}$  – в бік від'ємного напрямку осі  $y$ . Вектор  $\bar{a}_B$  зображаємо як діагональ прямокутника, побудованого на складових  $\bar{a}_{Bx}, \bar{a}_{By}$  як на сторонах.

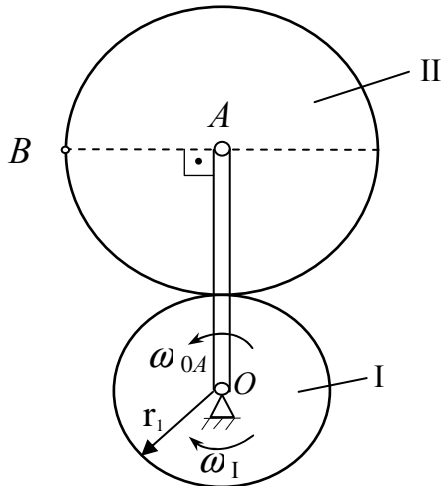


**Відповідь:**

$$\omega_{кол} = 2,8 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad V_B = 67,2 \text{ см/с};$$

$$\varepsilon_{кол} = 14,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; \quad a_B = 346 \text{ см/с}^2.$$

**Приклад 3.** Плоский механізм складається з кривошипа  $OA$  і двох зубчастих коліс I і II, з'єднаних між собою кривошипом  $AB$ .



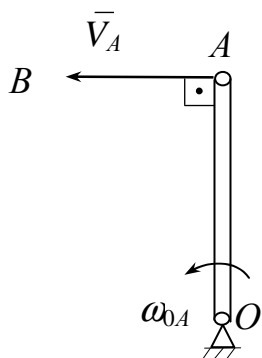
Тут  $OA = 30 \text{ см}$ ,  $r_1 = 10 \text{ см}$ . Кривошип  $OA$  обертається навколо осі  $O$  і має у даний момент часу кутову швидкість  $\omega_{OA} = 3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$  і кутове прискорення  $\varepsilon_{OA} = 0$ . Колесо I обертається навколо осі  $O$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_1 = 6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Для заданого положення механізму треба визначити швидкість і прискорення точки  $B$ , а також кутові швидкість і

прискорення колеса II.

**Розв'язання.**

1. Визначимо швидкість точки  $B$ .

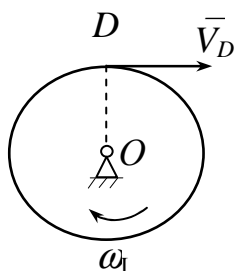
1) Спочатку розглянемо кривошип  $OA$ , рух якого є заданим.



Він виконує обертальний рух навколо нерухомої точки  $O$ , тому швидкість точки  $A$  визначається за формулою:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (см/с)}.$$

Вектор  $\vec{V}_A \perp OA$  і напрямлений у бік обертання стержня (за «стрілкою»  $\omega_{OA}$ ).

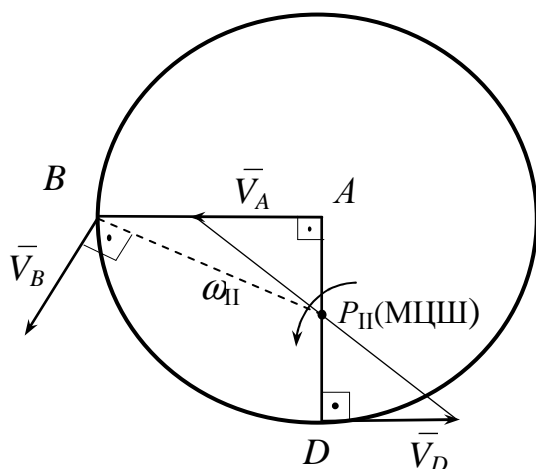


2) Розглянемо колесо I, рух якого також є заданим. Колесо I виконує обертальний рух навколо нерухомої точки  $O$ .

Позначимо точку дотику коліс I і II літерою  $D$ , тоді її швидкість дорівнює  $V_D = \omega_I \cdot OD = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (см/с)}$ .

Вектор  $\vec{V}_D \perp OD$  і напрямлений у бік обертання колеса I.

3) Розглянемо колесо II. Воно виконує плоскопаралельний рух, тому спочатку треба побудувати МЦШ. Для побудови МЦШ з'єднаємо



кінці векторів швидкостей  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_D$ . МЦШ знаходиться в точці перетину цього відрізка з лінією, яка проходить через точки  $A$  і  $D$ . Кутова швидкість колеса зв'язана зі швидкостями  $V_A$  і  $V_D$  співвідношенням:

$$\omega_{II} = \frac{V_A}{AP_{II}} = \frac{V_D}{DP_{II}}.$$

Зважаючи, що  $DP_{II} = AD - AP_{II} = (OA - r_I) - AP_{II} = 20 - AP_{II}$ , праву частину співвідношення для  $\omega_{II}$  можна розглядувати як рівняння відносно відрізка  $AP_{II}$ :

$$\frac{V_A}{AP_{II}} = \frac{V_D}{20 - AP_{II}}.$$

Розв'яжемо це рівняння і знайдемо  $AP_{II}$ :

$$V_A \cdot (20 - AP_{II}) = V_D \cdot AP_{II},$$

$$V_A \cdot 20 = AP_{II} \cdot (V_A + V_D),$$

$$AP_{II} = \frac{V_A \cdot 20}{V_A + V_D} = \frac{90 \cdot 20}{90 + 60} = \frac{1800}{150} = 12 \text{ (см)}.$$

Тоді

$$\omega_{II} = \frac{V_A}{AP_{II}} = \frac{90}{12} = 7,5 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Кутова швидкість  $\omega_{II}$  напрямлена відповідно до того, як вектор  $\vec{V}_A$  «обертається» навколо МЦШ ( $P_{II}$ ). Швидкість точки  $B$  буде

$$\begin{aligned} V_B &= \omega_{II} \cdot BP_{II} = \omega_{II} \cdot \sqrt{AB^2 + AP_{II}^2} = 7,5 \cdot \sqrt{20^2 + 12^2} = 7,5 \cdot \sqrt{544} = \\ &= 7,5 \cdot 4 \cdot \sqrt{34} \approx 30 \cdot 5,83 \approx 175 \left( \frac{\text{см}}{\text{с}} \right) \end{aligned}$$

і напрямлена згідно зі «стрілкою»  $\omega_{II}$ .

2. Визначимо прискорення точки  $B$ .

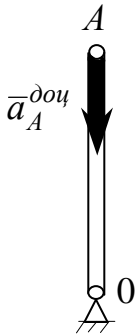
1) Розглянемо кривошип  $OA$ . Він виконує обертальний рух,

тому модулі складових прискорення точки  $A$  визначаються за формулами:

$$a_A^{\partial\omega} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3^2 \cdot 30 = 270 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_A^{o\partial} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0.$$

Вектор  $\vec{a}_A^{\partial\omega}$  напрямлений уздовж стержня від точки  $A$  до центра обертання  $O$ .



2) Прискорення точки  $B$  колеса II, яке виконує плоскопаралельний рух, визначається за формулою

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^{\partial\omega} + \vec{a}_A^{o\partial} + \vec{a}_{BA}^{\partial\omega} + \vec{a}_{BA}^{o\partial}.$$

Оскільки траєкторія точки  $B$  невідома (на неї не накладено обмежень з боку інших тіл), її прискорення будемо розшукувати у вигляді двох невідомих складових  $\vec{a}_{Bx}, \vec{a}_{By}$ , напрямлених уздовж осей координат  $x, y$ :

$$\vec{a}_{Bx} + \vec{a}_{By} = \vec{a}_A^{\partial\omega} + \vec{a}_A^{o\partial} + \vec{a}_{BA}^{\partial\omega} + \vec{a}_{BA}^{o\partial}.$$

Кутове прискорення колеса II визначимо, використовуючи властивості співвідношення

$$\frac{V_A}{AP_{II}} = \frac{V_D}{DP_{II}} = \frac{V_A + V_D}{AD}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{II} &= \frac{d\omega_{II}}{dt} = \frac{d\left(\frac{V_A + V_D}{AD}\right)}{dt} = \frac{1}{AD} \frac{d(V_A + V_D)}{dt} = \frac{1}{AD} \left( \frac{dV_A}{dt} + \frac{dV_D}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{AD} (a_A^{o\partial} + a_D^{o\partial}) = 0. \end{aligned}$$

В цій формулі  $a_D^{o\partial} = \varepsilon_I \cdot OD = \frac{d\omega_I}{dt} \cdot OD = 0$ , оскільки за умовами задачі

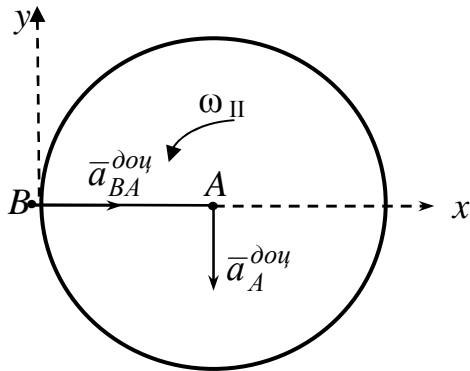
$\omega_I = \text{const}$ .



Модулі складових  $\bar{a}_{BA}^{\partial\omega\omega}$  і  $\bar{a}_{BA}^{o\bar{o}}$  визначимо за формулами:

$$a_{BA}^{\partial\omega\omega} = \omega_{II}^2 \cdot BA = 7,5^2 \cdot 10 = 562,5 \cdot 10 = 562,5 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_{BA}^{o\bar{o}} = \varepsilon_{II} \cdot BA = 0.$$



Вектор  $\bar{a}_{BA}^{\partial\omega\omega}$  напрямлений по відрітку  $BA$  від точки  $B$  до полюса  $A$ .

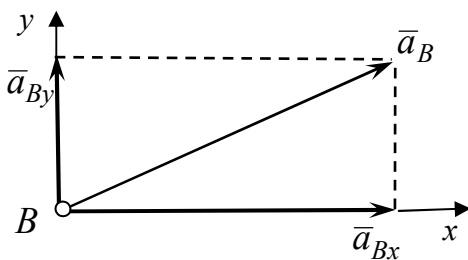
Побудуємо осі координат  $xu$  і спроектуємо векторне рівняння для визначення прискорення  $\bar{a}_B$  на ці осі:

$$x: a_{Bx} = a_{BA}^{\partial\omega\omega} = 562,5 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$y: a_{By} = a_A^{\partial\omega\omega} = 270 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Модуль прискорення точки  $B$  знаходимо за формулою

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(562,5)^2 + (270)^2} \approx 607 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$



Оскільки  $a_{Bx} > 0$ ,  $a_{By} > 0$ , то складові прискорення точки  $B$  напрямлені в бік додатного напрямку осей  $x$  та  $y$ , а вектор  $\bar{a}_B$  зображається як діагональ прямокутника,

побудованого на складових  $a_{Bx}$ ,  $a_{By}$  як на сторонах.

$$\text{Відповідь: } \omega_{II} = 7,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad V_B = 67,2 \text{ см/с};$$

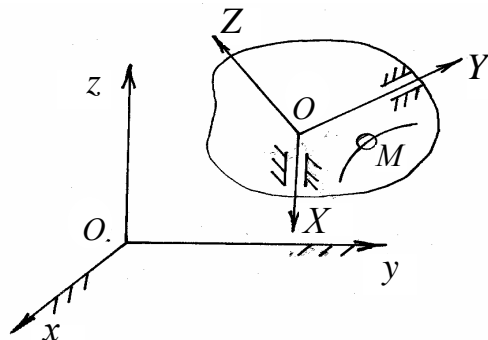
$$\varepsilon_{II} = 0; \quad a_B = 607 \text{ см/с}^2.$$

### 2.3 Складний рух точки

**Складний рух точки** – це рух, при якому точка  $M$  бере участь у двох і більше рухах одночасно.

Рух точки  $M$  відповідно до нерухомої системи координат  $x, y, z$  називається **абсолютним**.

Рух точки  $M$  відносно рухомої системи координат  $XYZ$  називається **відносним**.



**Переносним рухом** точки називається рух такої точки рухомої системи координат XYZ, з якою в даний момент часу збігається рухома точка  $M$ .

**Теорема про додавання швидкостей:** Абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі швидкостей в переносному і відносному рухах:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

$\vec{V}_a$  – абсолютна швидкість;

$\vec{V}_e$  – переносна швидкість;

$\vec{V}_r$  – відносна швидкість.

**Теорема Коріоліса** про додавання прискорень: абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі прискорення у переносному русі  $\vec{a}_e$ , прискорення у відносному русі  $\vec{a}_r$  і прискорення Коріоліса  $\vec{a}_c$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c;$$

Вектор прискорення Коріоліса виражається формулою

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r).$$

Модуль (величина) вектора прискорення Коріоліса дорівнює

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\hat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}),$$

де  $\omega_e$  – кутова швидкість переносного обертального руху.

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю, якщо:

- 1) переносний рух є поступальним ( $\omega_e = 0$ );
- 2) відносна швидкість  $\vec{V}_r$  в даний момент дорівнює нулю ( $v_r = 0$ );
- 3) вектор відносної швидкості  $\vec{V}_r$  в даний момент паралельний вектору

кутової швидкості переносного обертального руху ( $\sin(\hat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 0$ ).

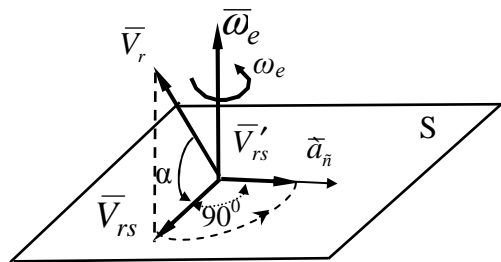
Для визначення напрямку прискорення Коріоліса можна користуватися або правилом векторного добутку, або правилом Жуковського. Згідно з правилом Жуковського визначення напрямку вектора  $\vec{a}_c$  проводиться в такій послідовності:

1) необхідно спроектувати вектор відносної швидкості  $\vec{V}_r$  на площину  $S$ , перпендикулярну до осі переносного обертання (перпендикулярну вектору  $\vec{\omega}_e$ );

2) одержану проекцію  $\vec{V}_{rs}$  повернути в цій площині на 90 градусів у напрямі переносного обертання (у напрямі дугової стрілки  $\omega_e$ ).

3) напрям коріолісова прискорення  $\vec{a}_c$  співпадає з напрямом вектора  $\vec{V}_{rs}'$

За величиною  $a_c = 2\omega_e V_r \sin \alpha$ .



**Приклад 4.** Диск обертається навколо вертикального діаметра з кутовим прискоренням  $\varepsilon = 2t$  (рад/с<sup>2</sup>). Вздовж радіуса  $OA$ , нахиленого до осі обертання під кутом  $45^\circ$ , рухається точка  $M$  із сталим прискоренням  $a = 2$  (см/с<sup>2</sup>). В момент  $t = 0$  кутова швидкість диска та відносна швидкість точки, що міститься в центрі диска, дорівнюють нулю, тобто,  $\omega_0 = 0$ ,  $V_{r0} = 0$ . Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки  $M$  в момент  $t = 1$  с.

**Розв'язання:** За нерухому систему відліку прийемо землю, а за рухому – диск, що обертається. Переносний рух (рух диска відносно землі) – обертальний. Кутова швидкість диска

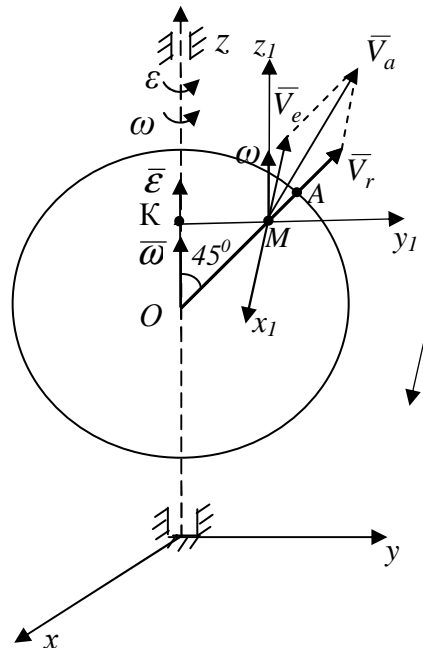
$$\omega = \int \varepsilon dt = \int 2t dt = t^2 + \tilde{N},$$

де  $C = 0$ , оскільки  $\omega_0 = 0$ .

Отже  $\omega = t^2$ .

Для абсолютної швидкості точки  $M$  маємо:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$



Відносна швидкість спрямована по радіусу  $OA$  і дорівнює  $V_r = 2t$ . Переносна швидкість спрямована перпендикулярно до креслення від нас в бік обертання диска і дорівнює

$$V_e = \omega \cdot MK = \omega \cdot s \cdot \sin 45^\circ,$$

де  $s = (a \cdot t^2) / 2$ . Отже  $V_e = t^4 / \sqrt{2}$ .

Оскільки між векторами швидкості  $\bar{V}_e$  та  $\bar{V}_r$  кут  $90^\circ$ , то

$$\bar{V}_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{4t^2 + t^3 / 2}.$$

В момент  $t = 1$  с

$$V_a = \sqrt{4,5} \approx 2,12 \text{ см/с}.$$

Зважаючи на те, що переносний рух обертальний, маємо

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c.$$

Відносне прискорення спрямоване вздовж радіуса  $OA$  і дорівнює  $a_r = a = 2$  (см/с). Переносне прискорення точки  $M$  у свою чергу складається із двох складових: обертального та доцентрового прискорень, тобто

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{об} + \bar{a}_e^{доц}.$$

Переносне доцентрове прискорення спрямоване по  $MK$  (від точки  $M$  до точки  $K$ ) і чисельно дорівнює

$$a_e^{доц} = \omega^2 \cdot MK = \omega^2 \cdot s \cdot \sin 45^\circ$$

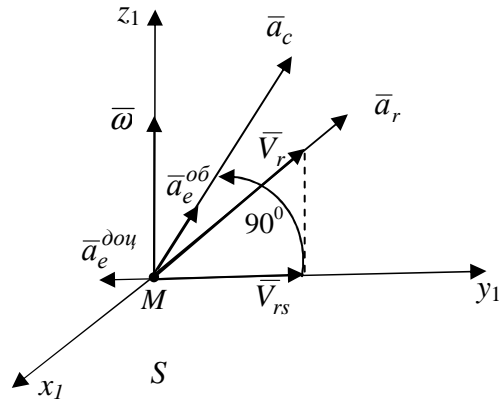
$$\text{або } a_e^{\partial\omega} = \frac{t^6 \sqrt{2} \text{ см}}{2 \text{ с}^2}.$$

Переносне обертальне прискорення спрямоване перпендикулярно до креслення від нас в бік дугової стрілки  $\varepsilon$ .

$$a_e^{\partial\omega} = \varepsilon \cdot MK = 2t \cdot s \cdot \sin 45^0 = t^3 \sqrt{2} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$\text{при } t = 1 \text{ с, } a_e^{\partial\omega} = \sqrt{2/2} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad a_e^{\partial\omega} = \sqrt{2} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Для визначення коріолісового прискорення умовно перенесемо вектор  $\bar{\omega}$  паралельно самому собі в точку М. Прискорення  $\bar{a}_c$  буде спрямоване перпендикулярно до площини  $(\bar{\omega}, \bar{V}_r)$  в той бік, звідки поворот  $\bar{\omega}$  до  $\bar{V}_r$  на менший кут має напрямок проти руху годинникової стрілки, тобто в даному випадку перпендикулярно до площини креслення від спостерігача. По модулю



$$a_c = 2\omega \cdot V_r \cdot \sin 45^0 = 2t^3 \sqrt{2} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\text{і при } t = 1 \text{ с } a_c = 2\sqrt{2} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

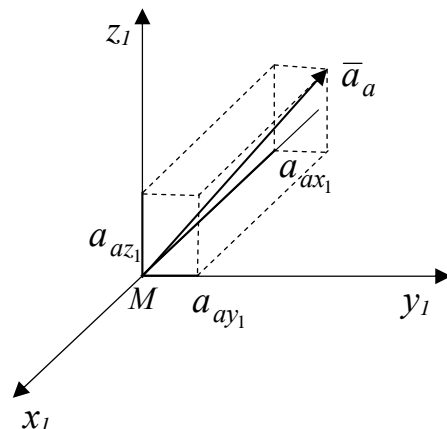
Для визначення чисельного значення абсолютного прискорення і, отже, складання векторів  $\bar{a}_r, \bar{a}_e^{\partial\omega}, \bar{a}_e^{\partial\omega}, \bar{a}_c$  проведемо три взаємно перпендикулярні осі  $X_1, Y_1, Z_1$ . Проектуємо усі складові абсолютного прискорення на ці координатні осі, отримаємо проекції абсолютного прискорення точки М:

$$a_{ax_1} = -a_e^{\partial\omega} - a_c = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -3\sqrt{2},$$

$$a_{ay_1} = -a_e^{\partial\omega} + a_r \cdot \cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_{az_1} = a_r \cdot \cos 45^0 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Будуємо вектор абсолютного прискорення з урахуванням визначених проекцій на осі. За величиною абсолютне прискорення точки М буде:



$$a_a = \sqrt{a_{ax_1}^2 + a_{ay_1}^2 + a_{az_1}^2} = \sqrt{18 + \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{20,5} = 4,5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

**Відповідь:** абсолютна швидкість точки М  $V_a = 2,12 \text{ см/с}$ ; абсолютне прискорення точки М  $a_a = 4,5 \text{ см/с}^2$ .

### 3 ДИНАМІКА ТОЧКИ

**Динаміка** – розділ теоретичної механіки, що вивчає механічний рух матеріальних об'єктів (матеріальної точки, системи матеріальних точок, твердого тіла) під дією прикладених до них сил.

#### 3.1. Закони динаміки (Ньютона)

**Перший (закон інерції):** існує система відліку, що має назву *інерціальної* (нерухомої), у якій ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою або прямолінійного рівномірного руху доти, доки вплив зовнішніх сил не введе її з цього стану.

**Другий (основний закон):** прискорення матеріальної точки в інерціальній системі відліку пропорційне вектору сили, що прикладена до цієї точки:  $m\bar{a} = \bar{F}$ .

**Третій (закон рівності дії та протидії):** дві матеріальні точки взаємодіють між собою з силами, рівними за величиною, протилежними за напрямом і такими, що мають спільну лінію дії:  $\bar{F} = -\bar{F}'$ .

**Четвертий (закон незалежності дії сил):** якщо на матеріальну точку одночасно діють декілька сил, то її прискорення в інерціальній системі відліку дорівнює геометричній сумі прискорень, які точка одержувала би від кожної сили зокрема.

#### 3.2 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Основне рівняння динаміки:  $m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$  – можна записати у вигляді диференціального рівняння (*векторна форма*):

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i,$$

де  $m$  – маса точки;  $\bar{r}$  – радіус-вектор точки, що є функцією часу.

Дане рівняння можна подати у вигляді проекцій на осі декартової системи координат  $x, y, z$  (*координатна форма*):

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz},$$

де  $\ddot{x} = a_x$ ;  $\ddot{y} = a_y$ ;  $\ddot{z} = a_z$  – проекції вектора прискорення;  $\sum_{i=1}^n F_{ix}$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{iy}$ ,

$\sum_{i=1}^n F_{iz}$  – алгебраїчні суми проекції всіх сил, що діють на точку, на координатні осі.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на осі натуральної системи координат  $\tau, n, b$  (*натуральна форма*):

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in}; \quad 0 = \sum_{i=1}^n F_{ib},$$

де  $v_\tau$  – проекція швидкості на дотичну;  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії

в даній точці;  $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{in}$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{ib}$  – алгебраїчні суми проекцій сил, що діють на точку, на натуральні осі. Цими рівняннями зручно користуватися, коли точка рухається, наприклад, по колу.

### 3.3 Дві задачі динаміки

**Перша** або пряма задача динаміки точки – рух точки, а також її маса, відомі. Треба знайти силу, яка діє на точку.

**Друга** або обернена задача динаміки точки – відомі сили, що діють на точку, її маса, а також початкові умови руху. Треба визначити закон руху точки.

Розв'язання першої задачі – знаходження сили за даним законом руху матеріальної точки зводиться до знаходження прискорення точки.

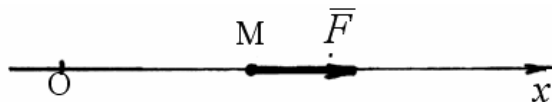
Розв'язання другої задачі – знаходження закону руху матеріальної точки за даними силами пов'язане з інтегруванням диференціальних рівнянь руху. Загальний розв'язок цих рівнянь визначає координати точки як функції часу. Сталі інтегрування, що виникають при інтегруванні диференціальних рівнянь, визначають за допомогою початкових умов.

**Початкові умови** – значення координат точки і її перших похідних за часом (тобто проекцій вектора швидкості на осі координат) у деякий фіксований момент часу  $t_0$  (звичайно  $t_0 = 0$ ):  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $y|_{t=0} = y_0$ ,  $z|_{t=0} = z_0$ ,

$$\dot{x}|_{t=0} = V_{0x}, \quad \dot{y}|_{t=0} = V_{0y}, \quad \dot{z}|_{t=0} = V_{0z}.$$

**Приклад:** Матеріальна точка масою  $m$  рухається по прямій у напрямку осі  $Ox$  під дією сталої сили  $\bar{F}$ . Знайти закон руху точки при початкових умовах

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= x_0, \\ \dot{x}|_{t=0} &= V_0. \end{aligned}$$



**Розв'язання:**

1) складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$m\ddot{x} = F, \text{ або } \ddot{x} = \frac{F}{m};$$

2) після інтегрування диференціального рівняння отримаємо:

$$\dot{x} = \frac{F}{m}t + C_1;$$

$$x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування;

3) визначимо сталі інтегрування за допомогою початкових умов:

$$V_0 = \frac{F}{m} \cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = V_0;$$

$$x_0 = \frac{F}{m} \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0;$$

4) закону руху визначимо у вигляді:

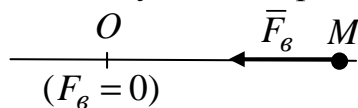
$$x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0.$$

### 3.4 Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються *механічними коливаннями*. При цьому на матеріальну точку можуть діяти: відновлююча сила, сила опору руху та зовнішня збурююча сила. Рух точки здійснюється по прямій, яка співпадає з сумісною лінією дії вказаних сил. Залежно від комбінації цих сил розрізняють *вільні, згасаючі та вимушені* коливання.

#### 3.4.1 Вільні коливання

Існує клас сил, що називаються **відновлюючими**, модулі яких в лінійних задачах є пропорційними відхиленню точки від положення, де ці сили дорівнюють нулю, і напрямленими до цього положення:



$$F_g = c \cdot MO,$$

де  $c$  – коефіцієнт пропорційності.

Коливання, що відбуваються під дією тільки відновлюючої сили, називаються **вільними**.

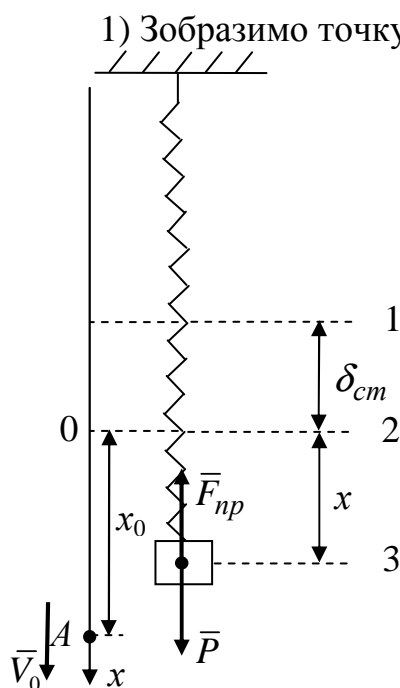
Різновидністю відновлюючої сили є сила пружності пружини, за допомогою якої моделюються пружні властивості реальних тіл. В лінійних задачах сила пружності відповідає закону Гука:

$$F_{np} = c \cdot \lambda,$$

де  $c$  – **коефіцієнт жорсткості** пружини, що показує, яку силу треба прикласти до кінця пружини для її деформації на одиницю довжини;  $\lambda$  – деформація пружини (різниця між довжиною пружини у даному стані (розтягнутому або стиснутому) і недеформованому).

Розглянемо вертикальні коливання вантажу маси  $m$ , що підвішений до пружини жорсткості  $c$  і здійснює поступальний рух. В такому випадку вантаж можна вважати матеріальною точкою маси  $m$ . Визначимо рівняння руху точки.

Для розв'язання задачі виконаємо наступні дії.



1) Зобразимо точку на розрахунковій схемі у довільному положенні.

Для цього послідовно позначимо на схемі три характерних рівня:

1 – вільний кінець недеформованої пружини (в цьому положенні  $F_{np} = 0$ );

2 – положення статичної рівноваги точки, рух якої досліджується (це положення буде нижчим за рівень 1, оскільки при приєднанні точки до кінця недеформованої пружини остання буде у даному випадку розтягнутою під дією сили ваги точки). Відстань між рівнями 1 (недеформованої пружини) і 2 (статичної рівноваги точки) називається **статичною деформацією пружини** і позначається  $\delta_{cm}$ . В положенні рів-

новаги точки  $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$ , або  $P - F_{np} = 0$ . Ос-

тання рівність з урахуванням деформації пружини  $\lambda = \delta_{cm}$  набуде вигляду

$$P - c \cdot \delta_{cm} = 0; \quad (1)$$

3 – довільне положення точки під час коливань (бажано рівень 3 зобразити так, щоб рівні 1, 2, 3 йшли на схемі послідовно).

2) У довільному положенні покажемо діючі на матеріальну точку сили, вважаючи її вільною. Це будуть сили ваги точки  $\bar{P}$  і пружності пружини  $\bar{F}_{np}$  (реакція пружини).

3) Виберемо систему відліку. Початок системи відліку бажано вибрати в положенні рівноваги точки (рівень 2), а вісь  $x$  направити у бік зростання цифр 1,2,3, що позначають характерні рівні на схемі. В такому разі довільне положення буде знаходитись в області додатних значень координати  $x$ .

4) Складемо диференціальне рівняння руху точки. Для цього спроектуємо основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

на вісь  $x$ :

$$m\ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x),$$

де  $\lambda = \delta_{cm} + x$  – повна деформація пружини у довільному положенні. З урахуванням рівності (1) права частина останнього рівняння спроститься:

$$m\ddot{x} = P - c \cdot \delta_{cm} - cx = -cx.$$

Подальші перетворення диференціального рівняння виконуються у такій послідовності:

- шукану функцію  $x$  і її похідні за часом треба перенести в ліву частину рівняння

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$



- коефіцієнт перед вищою похідною зробити рівним одиниці (поділити усі доданки на масу  $m$ )

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

- ввести позначення: коефіцієнт перед шуканою функцією  $x$  позначити

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}. \quad (2)$$

Тоді **диференціальне рівняння вільних коливань** матеріальної точки набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

5) Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (3) буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов. Щоб скористатись початковими умовами, треба мати вираз для похідної за часом від координати  $x$ . Диференціюючи за часом рівняння (4), отримаємо:

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (5)$$

6) Визначимо сталі інтегрування  $C_1, C_2$ . Для цього складемо початкові умови. Припустимо, що матеріальна точка почала рухатись, маючи додатні значення початкової координати (точка А на розрахунковій схемі) і проекції швидкості:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0. \quad (6)$$

Підставляючи початкові умови (6) у вирази функцій координати (4) і проекції швидкості (5) точки, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування будуть

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи сталі інтегрування у вираз (4), отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (7)$$

Рівняння (7) називається **рівнянням вільних коливань** матеріальної точки.

Рівняння (4) або (7) можна подати у формі

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8)$$

де  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2}$  (або  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}$ ,  $\varphi_0 = \arctg \frac{x_0 \cdot \omega_0}{V_0}$ ).

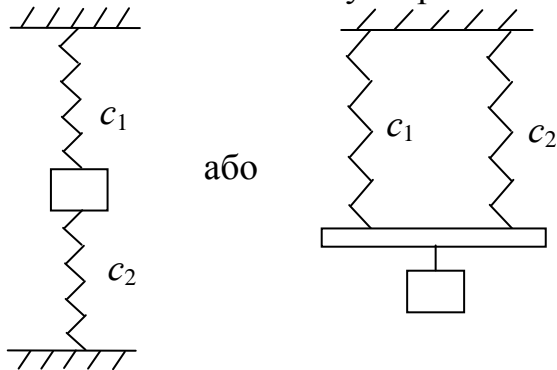
З формули (8) видно, що параметр  $A$  є **амплітудою коливань** (найбільшим відхиленням точки від положення рівноваги), аргумент  $\omega_0 t + \varphi_0$  називається **фазою коливань**, а величина  $\varphi_0$  – **початковою фазою**. Параметр  $\omega_0$ , як коефіцієнт при часі  $t$  у формулі тригонометричної функції, має назву **колової частоти коливань** (або **власної частоти**). Колова частота визначає число коливань за проміжок часу  $2\pi$  секунд і вимірюється у  $rad/c$  (або  $1/c$ ). Слід зазначити, що в технічній літературі використовується і звичайна частота  $f$  (або інше позначення), яка визначає число коливань за 1 секунду, вимірюється в  $Гц$  (Герц) і зв'язана з коловою частотою співвідношенням  $\omega_0 = 2\pi f$ .

Залежність між **періодом**  $T_0$  (проміжком часу, протягом якого відбувається повне коливання) і коловою частотою визначається з умови періодичності руху і має вигляд

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (10)$$

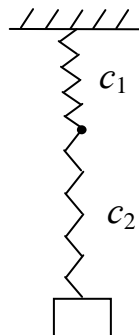
Розглянута на рисунку механічна система називається **консервативною**. У відповідності з (8) вантаж (матеріальна точка) здійснює **гармонічний** коливальний рух. Колова частота  $\omega_0$  і період  $T_0$  від початкових умов не залежать, а визначаються параметрами системи ( $m, c$ ). Амплітуда  $A$  і початкова фаза  $\varphi_0$  вільних коливань залежать від початкових умов.

Пружини, які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно і послідовно з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку подані на рисунках вихідні механічні схеми необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість  $c_e$ .



Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при паралельному з'єднанні пружних елементів буде мати жорсткість

$$c_e = c_1 + c_2,$$



Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при послідовному з'єднанні пружних елементів буде мати жорсткість

$$c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2)$$

При змішаному з'єднанні трьох і більше пружних елементів послідовно замінюються по два пружних елемента, доки не залишиться один з еквівалентною жорсткістю  $C_e$ .

### 3.4.2 Вільні коливання при наявності сил опору (затухаючі коливання)

При русі в середовищі (рідині) на матеріальну точку діє *сила опору* (в'язкого *тертя*), яку при малих швидкостях руху можна вважати прямо пропорційною швидкості точки і напрямленою в бік, протилежний швидкості:  $\bar{R} = -b\bar{V}$ , де  $b$  - коефіцієнт опору середовища. За допомогою сили опору моделюються в'язкі властивості реальних пружних тіл. Коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору, називаються **затухаючими**.

Механічна система, що моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як у §3.4.1, тільки додається сила опору (при зображенні сили опору вважаємо, що точка рухається в бік додатного напрямку осі  $x$ ). Умовні позначення на рисунках співпадають.

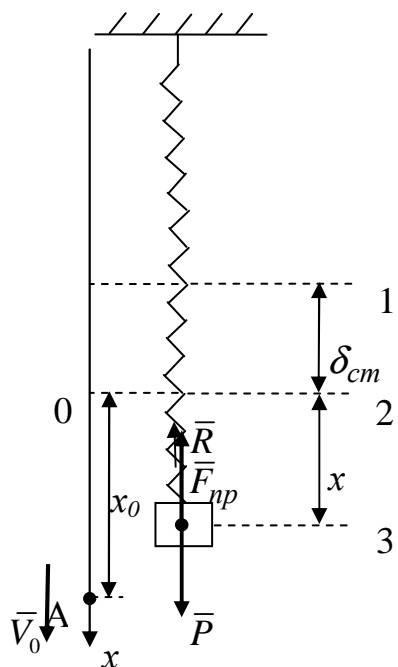
Диференціальне рівняння руху матеріальної точки буде мати вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R}$$

або 
$$m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x},$$

або 
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Розділимо усі доданки на  $m$  і введемо позначення



$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, 2h = \frac{b}{m}, \quad (11)$$

де  $h$  – коефіцієнт демпфірування коливань.

Тоді **диференціальне рівняння вільних коливань при наявності сили опору** набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (12)$$

Характер руху вантажу істотним чином залежить від співвідношення  $h$  і  $\omega_0$ .

Рівняння коливання вантажу  $x(t)$  і перша похідна за часом  $\dot{x}(t)$  у випадку *малого опору* ( $h < \omega_0$ ) мають вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) = A \cdot e^{-ht} \sin(\omega_0^* t + \varphi_0), \quad (13)$$

$$\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \omega_0^* (-C_1 \sin \omega_0^* t + C_2 \cos \omega_0^* t), \quad (14)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов і у випадку (6) мають значення

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = (V_0 + hx_0)/\omega_0^*; \\ A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + hx_0)^2}{\omega_0^{*2}}}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{V_0 + hx_0}; \quad \omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

Відповідна до рисунку механічна система називається *дисипативною*, а співвідношення (13) називається **рівнянням затухаючих коливань**. При цьому амплітуда коливань  $Ae^{-ht}$  з часом спадає за експоненціальним законом до нуля. Величина  $\omega_0^*$  є **коловою частотою затухаючих коливань** і пов'язана з умовним **періодом затухаючих коливань**  $T_0^*$  формулою

$$T_0^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (15)$$

У випадку *великого опору* ( $h > \omega_0$ ) закон коливань вантажу буде мати вигляд

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (16)$$

$$\text{де} \quad p_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2};$$

Це рівняння описує *аперіодичний затухаючий рух*. Координата  $x$  вантажу при  $t \rightarrow 0$  монотонно зменшується, а вантаж наближається до положення статичної рівноваги.

*Граничний випадок* має місце при  $h = \omega_0$ . Тут закон руху вантажу буде

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 \cdot t). \quad (17)$$

Розглянутий рух (15) також є *аперіодичним затухаючим* ( $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

### 3.4.3 Вимушені коливання

Коливання, що відбуваються під дією відновлюючої сили і збурювання, яке змінюється за часом, називаються **вимушеними**. Ці коливання виникають у разі безпосередньої дії на точку збурюючої сили (силове збудження коливань), при переміщенні точки прикріплення до основи пружини або пружного тіла (кінематичне збудження коливань), а також при взаємному зміщенні мас, які складають механічну систему, з'єднаною з пружною основою.

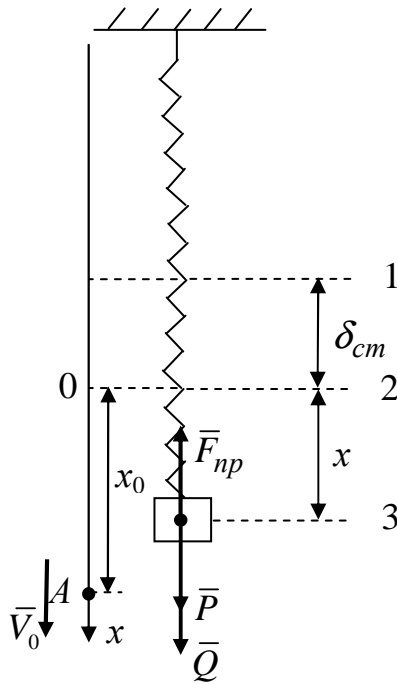
#### **Силове збудження коливань**

Сила  $Q(t)$ , яка змінюється за часом по заданому закону, називається **збурюючою**. Розглянемо простіший, але практично важливий випадок, коли сила змінюється за гармонійним законом

$$Q = H \cdot \sin \omega_B t,$$

де  $H$  – амплітуда збурюючої сили;  $\omega_B$  – її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як у § 3.4.1, тільки додається збурююча сила (при зображенні сили вважаємо, що вона напрямлена в бік додатного напрямку осі  $x$ ). Умовні позначення на рисунках співпадають.



Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\ddot{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{Q}$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) + H \sin \omega_B t,$$

$$\text{або } m\ddot{x} + cx = H \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на  $m$  і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad h_B = \frac{H}{m}. \quad (18)$$

Тоді **диференціальне рівняння вимушених коливань** набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t. \quad (19)$$

Рівняння (19) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (19) подамо у вигляді

$$x = x_1 + x_2,$$

де  $x_1$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння,  $x_2$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (4). При визначенні частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_B \neq \omega_0; \quad \omega_B \approx \omega_0; \quad \omega_B = \omega_0.$$

1)  $\omega_B \neq \omega_0$  (частота збурюючої сили і власна частота різні).

В цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$x_2 = \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t,$$

а рівняння коливання вантажу  $x(t)$  і перша похідна за часом  $\dot{x}(t)$  мають вигляд

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t, \quad (20)$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t. \quad (21)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов і у випадку (6) мають значення

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0} - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega_B^2)}.$$

Рівняння (20) називається **рівнянням вимушених коливань**. Закон коливань вантажу при вимушених коливаннях є **бігармонійним** (двочастот-

ним) – відбувається накладення вільних (власних) коливань консервативної механічної системи (перші два доданки у формулі (20)) на чисто вимушені коливання з частотою збурюючої сили (останній доданок у формулі (20)). Особливістю таких коливань є те, що власні коливання збуджуються і при нульових початкових умовах. В реальних системах власні коливання за рахунок опору руху швидко затухають і залишаються чисто вимушені коливання. **Колова частота чисто вимушених коливань**  $\omega_B$  від параметрів системи і початкових умов не залежить, а визначається параметрами збурюючої сили.

**Амплітуда чисто вимушених коливань**  $A_B = \left| \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right|$  також від початкових умов не залежить а визначається параметрами збурюючої сили ( $H, \omega_B$ ) і механічної системи ( $m, c$ ).

2)  $\omega_B \approx \omega_0$  (частота збурюючої сили і власна частота близькі за значенням).

Припустимо, що початкові умови нульові ( $x_0 = 0, V_0 = 0$ ). Тоді, поклавши  $\omega_B / \omega_0 \approx 1$ , але  $\omega_0^2 - \omega_B^2 \neq 0$  і  $\omega_0 + \omega_B \approx 2\omega_B$ , з виразу (20) отримаємо

$$x \approx \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) \approx 2 \cdot \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \quad (22)$$

Такий рух називається **биттям**: коливальних рух, який відбувається з частотою  $\omega_B$  збурюючої сили та амплітудою, яка являється періодичною (з частотою  $(\omega_B - \omega_0) / 2$ ) функцією часу.

3)  $\omega_B = \omega_0$  (частота збурюючої сили і власна частота співпадають).

В цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$x_2 = -\frac{h_B t}{2\omega_B} \cos \omega_B t,$$

а рівняння коливання вантажу  $x(t)$  має вигляд

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{h_B}{2\omega_B} t \cdot \cos \omega_B t. \quad (23)$$

Як неважко помітити, амплітуда чисто вимушених коливань  $\frac{h_B \cdot t}{2\omega_B}$  збільшується прямо пропорційно часу і при  $t \rightarrow \infty$  необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається **резонансом**, а рівність  $\omega_B = \omega_0$  - **умовою резонансу**. В реальних конструкціях явище резонансу може служити причиною їхнього руйнування.

### **Кінематичне збудження коливань**

При кінематичному збудженні коливань заданий рух здійснює основа у точці прикріплення до нього кінця пружини за законом

$$\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t,$$

де  $a_\xi$  – амплітуда переміщення основи,  $\omega_B$  – її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як §3.4.1, тільки додається переміщення основи пружини  $\xi$  (при зображенні переміщення вважаємо, що воно напрямлене в бік додатного напрямку осі  $x$ ). Умовні позначення на рисунках співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np},$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ct} + x - \xi),$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} + cx = c \cdot a_\xi \cdot \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на  $m$  і введемо позначення

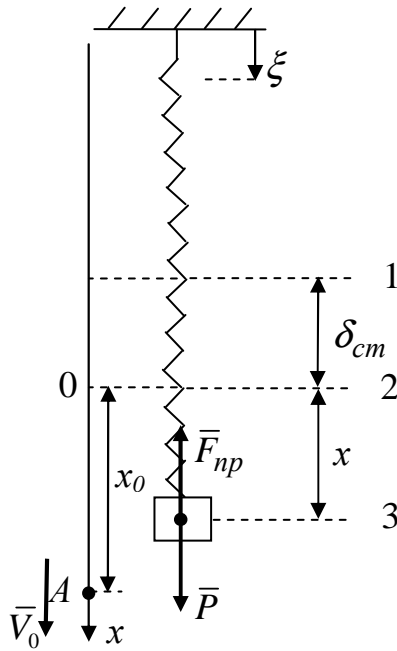
$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad h_B = \frac{c \cdot a_\xi}{m}. \quad (24)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t. \quad (25)$$

Диференціальне рівняння повністю співпадає з рівнянням (19).

Отже, властивості вимушених коливань при кінематичному збудженні будуть такими ж, як і при силовому.



#### 3.4.4 Вплив сили опору на вимушені коливання

Якщо на матеріальну точку, крім відновлюючої і збурюючої сил, діє також і сила опору (див. § 3.4.2), то диференціальне рівняння її руху матиме вид

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_y + \bar{R} + \bar{Q}$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ct} + x) - b\dot{x} + H \sin \omega_B t,$$

$$\text{або} \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на  $m$  і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad h_B = \frac{H}{m}.$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням опору набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t. \quad (26)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (26) складається з суми розв'язків

$$x = x_1 + x_2,$$

де  $x_1$  – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння;  $x_2$  – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

У випадку малого опору ( $h < \omega_0$ ) **рівняння вимушених коливань точки з урахуванням опору** має вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + \frac{h_B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \sin(\omega_B t - \varphi_B), \quad (27)$$

$$\text{де } \omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad \varphi_B = \arctg \frac{2h \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}, \quad C_1, C_2 - \text{сталі інтегрування;}$$

$\omega_0^*$  – колова частота затухаючих коливань,  $\varphi_B$  – зсув фази чисто вимушених коливань.

З рівняння руху (27) витікає, що коливання точки є *двочастотними*: вони відбуваються одночасно як з частотою  $\omega_0^*$  затухаючих коливань, так і з частотою  $\omega_B$  чисто вимушених коливань. Наявність множника у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху точки з частотою  $\omega_0^*$ . Проте чисто вимушені коливання з частотою збурюючої сили (другий доданок в рівнянні (27)) відбуваються постійно, незалежно від часу, з амплітудою  $A_B = h_B / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}$  і зсувом фази  $\varphi_B$ , величини яких визначаються параметрами системи і збурюючої сили.

Якщо значення частоти збурюючої сили дорівнює  $\omega_B = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}$ , а параметри механічної систем задовольняють нерівності  $0 < h / \omega_0 < 0,707$ , де  $h / \omega_0$  – відносне демпфірування, то амплітуда вимушених коливань вантажу буде найбільшою:

$$A_{B\max} = h_B / (2h\omega_0^*).$$

При ( $\omega_B = \omega_0$ ) в системі настає явище резонансу. Однак, на відміну від консервативної системи, амплітуда змушених коливань вантажу в дисипативній системі необмежено не зростає, а приймає кінцеве значення, яке дорівнює

$$A_{B\text{рез.}} = h_B / (2h\omega_0).$$

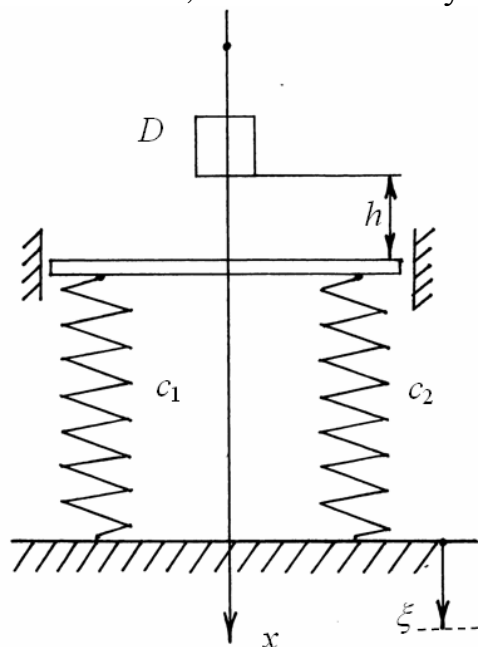
Якщо значення параметру відносного демпфірування лежать у діапазоні  $0,707 \leq h / \omega_0 < 1$ , то амплітуда вимушених коливань в зоні резонансу не має екстремуму і за будь-якої частоти збурюючої сили не перевищує статичне переміщення  $x_{cm} = H / c$ .

Таким чином, вплив сили опору на вимушені коливання виражається у зсуві фази вимушених коливань відносно фази збурюючої сили і зменшенні амплітуди коливань зі зростанням опору.



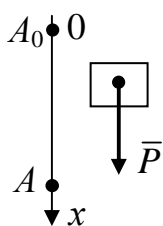
### 3.4.5 Приклади розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки

**Приклад 1.** Знайти рівняння коливального руху вантажу  $D$  у напрямку осі  $x$  з моменту дотику ним плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рухи плити та основи вважати поступальними.



**Умова задачі.** Пролетівши без початкової швидкості відстань  $h = 0,2$  м, вантаж  $D$  ( $m_D = 20$  кг) з'єднується у момент часу  $t = 0$  з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 100$  Н/см,  $c_2 = 200$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ . Одночасно основа починає здійснювати рух за законом  $\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t = 0,5 \cdot \sin 30t$  (см).

**Розв'язання:** Спочатку розглянемо допоміжну задачу про вільне падіння матеріальної точки (вантаж) з висоти  $h = A_0A$  до моменту дотику з плитою.



Розрахункова схема цієї задачі наведена на рисунку. Диференціальне рівняння руху має вид:  $m_D \ddot{x} = P$ , або  $m_D \ddot{x} = m_D g$ , або  $\ddot{x} = g$ . Інтегруючи за часом обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = gt + C_1, \\ x = gt^2/2 + C_1t + C_2. \end{cases}$$

При нульових початкових умовах сталі інтегрування  $C_1, C_2$  дорівнюють нулю. Записуючи функції  $\dot{x}, x$  у кінцевій точці А відрізка руху  $A_0A$ , матимемо систему алгебраїчних рівнянь

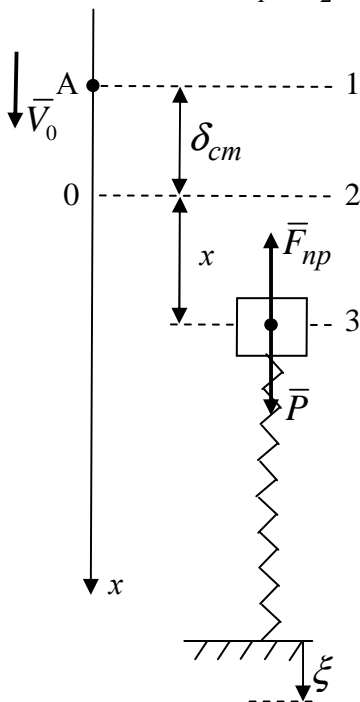
$$\begin{cases} V_A = g\tau, \\ h = g\tau^2/2, \end{cases}$$

звідки, виключаючи час руху на відріжку падіння  $\tau$ , отримаємо розрахункову формулу для швидкості точки в момент дотику з плитою  $V_A = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 2$  (м/с).

Розглянемо основну задачу про коливання матеріальної точки (вантажу).

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом (див. методику § 3.4.1) і подамо її на наступному рисунку, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу і його довільне положення під час коливань, точка  $A$  – положення вантажу в момент дотику плити,  $\delta_{ст}$  – статична деформація пружини під дією вантажу,  $\bar{P}, \bar{F}_{np}$  – відповідно сила ваги вантажу та сила пружності пружини,  $\xi$  – напрямок кінематичного збудження в точці кріплення пружини до рухомої опори. Знаходимо еквівалентну жорсткість  $c$  (див. § 3.4.1):

$$c = c_1 + c_2 = 100 + 200 = 300 \text{ Н/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$



Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x - \xi) =$$

$$= P - c\delta_{cm} - cx + c\xi = -cx + ca_\xi \sin \omega_B t,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = ca_\xi \sin \omega_B t,$$

$$\text{або} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = \frac{ca_\xi}{m_D} \sin \omega_B t,$$

$$\text{позначимо } \omega_0^2 = \frac{c}{m_D}, \quad h_B = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D}, \text{ тоді}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t.$$

Отримане рівняння має форму (25) диференціального рівняння вимушених коливань. Його розв'язок – функція  $x(t)$ , і її перша похідна за часом  $\dot{x}(t)$  мають вигляд (20), (21)

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t.$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1, C_2$  складемо початкові умови (координата точки  $A$  (див. розрахункову схему) і проекція початкової швидкості  $V_0 = V_A = 2 \text{ м/с}$ ):

$$x|_{t=0} = -\delta_{cm}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0$$

і підставимо їх у функції  $x(t)$  і  $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\delta_{cm} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування будуть

$$C_1 = -\delta_{cm}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left( V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи їх у функцію  $x(t)$ , отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -\delta_{cm} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left( V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

величина статичної деформації  $\delta_{ст} = \frac{g \cdot m_D}{c} \approx \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 10^4} = 0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м},$

значення власної частоти  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{20}} = 38,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$

$$h_B = \frac{c \cdot a_{\xi}}{m_D} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{20} = 7,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{7,5}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} = \frac{7,5}{1500 - 900} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \left( V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) = \frac{1}{38,7} \cdot \left( 2 - \frac{7,5 \cdot 30}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} \right) = \frac{1}{38,7} \cdot (2 - 0,375) = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

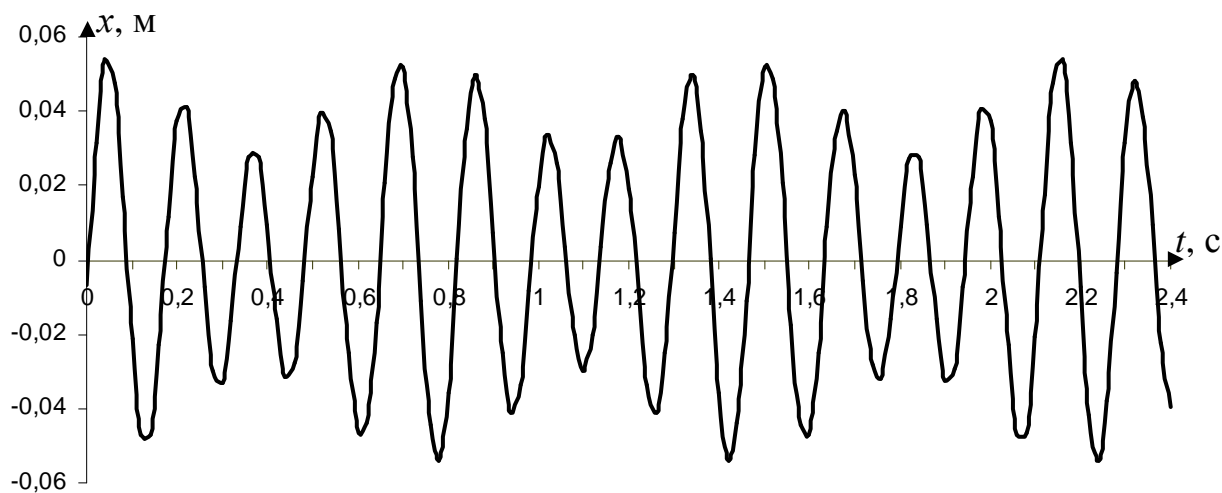
Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м)}.$$

**Перевірка:** При  $t = 0$  одержимо  $x|_{t=0} = -0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови  $x_0$ .

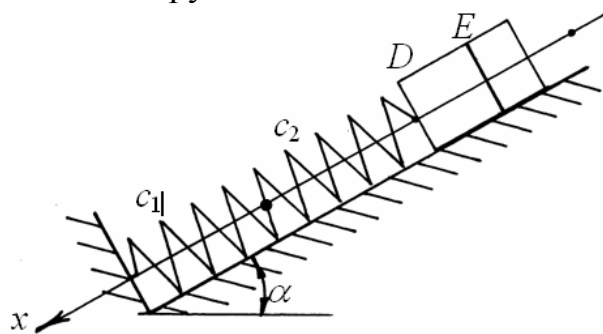
**Відповідь:** Вантаж здійснює вимушені коливання за законом  $x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м)}$ , з коловими частотами вільних  $\omega_0 = 38,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$  і чисто вимушених коливань  $\omega_B = 30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

Відповідні періоди (див. формулу (10)) будуть дорівнювати  $T_0 = 0,16 \text{ с}$  і  $T_B = 0,21 \text{ с}$ . Графік залежності координати  $x$  від часу  $t$  має вигляд



**Зауваження.** Для побудови графіка будь-якої функції треба скласти таблицю, у якій в першому стовпці задаються з певним кроком значення аргументу функції, а у другому обчислюються значення функції. Для побудови графіка періодичної функції при виборі кроку за аргументом треба мати впевненість, що кількість отриманих точок буде достатньою для описання щонайменше періоду цієї функції. Для описання періоду достатньо 8 точок, тому був вибраний крок за часом у 0,02 с, що дозволив описати найменший з двох періодів – 0,16 с. Усього на графіку вимушених коливань бажано вивести 10-20 найменших періодів.

**Приклад 2.** Знайти рівняння коливального руху вантажу  $D$  по гладенькій похилій площині у напрямку осі  $x$ , що співпадає з віссю двох послідовно з'єднаних пружин.



**Умова задачі.** Система встановлена на пружинах вантажів  $D$  ( $m_D = 20$  кг) і  $E$  ( $m_E = 10$  кг) знаходиться в положенні статичної рівноваги. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $E$  знімають з вантажу  $D$ . Одночасно вантажу  $D$  надають початкову швидкість  $V_0 = \dot{x}_0 = 0,1$  м/с у напрямку позитивного відліку координати  $x$ .

Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють  $c_1 = c_2 = 400$  Н/см. Кут  $\alpha = 30^\circ$ .

**Розв'язання:** Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом (див. методику § 3.4.1) і подамо її на рисунку, де рівні 1,2,3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу  $D$  і його довільне положення під час коливань, точка  $A$  – положення вантажу  $D$  в момент початку коливань (положення рівноваги системи вантажів  $D$  і  $E$ ),  $\delta_{cm_D}$  – статична деформація пружини.

жини під дією вантажу  $D$ ,  $\bar{P}_D, \bar{N}, \bar{F}_{np}$  – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні та сила пружності пружини.

В даній схемі в положенні статичної рівноваги вантажу  $D$  сила пружності  $\bar{F}_{np}$  пружини зрівноважує не всю силу ваги вантажу  $\bar{P}_D$ , а тільки її складову  $P_{Dx} = P_D \cdot \sin \alpha$  у напрямку осі  $Ox$ , яка співпадає з віссю пружини.

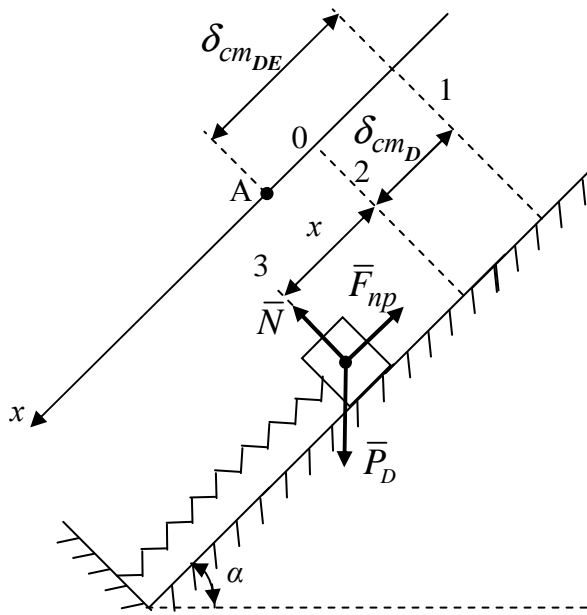
Знаходимо еквівалентну жорсткість  $c$  (див. § 3.4.1):

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{400 \cdot 400}{400 + 400} = 200 \text{ Н/см} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}.$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P_{Dx} - F_{np} = P_D \sin \alpha - c(\delta_{cmD} + x) = P_D \sin \alpha - c\delta_{cmD} - cx = -cx,$$

і перетворимо його до стандартної форми:



$$m_D \ddot{x} + cx = 0,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

позначимо  $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D},$

тоді  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

Отримане рівняння має форму (3) диференціального рівняння вільних коливань. Його розв'язок – функція  $x(t)$ , і її перша похідна за часом  $\dot{x}(t)$  мають вигляд (4), (5)

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t.$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1, C_2$  складемо початкові умови (координата точки А (див. розрахункову схему) і проекція початкової швидкості  $V_0 = V_A = 0,1 \text{ м/с}$ ):

$$x|_{t=0} = \delta_{cmDE} - \delta_{cmD} = \delta_{cmE}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0$$

і підставимо їх у функції  $x(t)$  і  $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} \delta_{cmE} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування будуть

$$C_1 = \delta_{cmE}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи їх у функцію  $x(t)$ , отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = \delta_{cm_E} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:  
величина статичної деформації

$$\delta_{cm_E} = \frac{m_E g \cdot \sin \alpha}{c} \approx \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

значення власної частоти  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{20}} = \sqrt{1000} \approx 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$

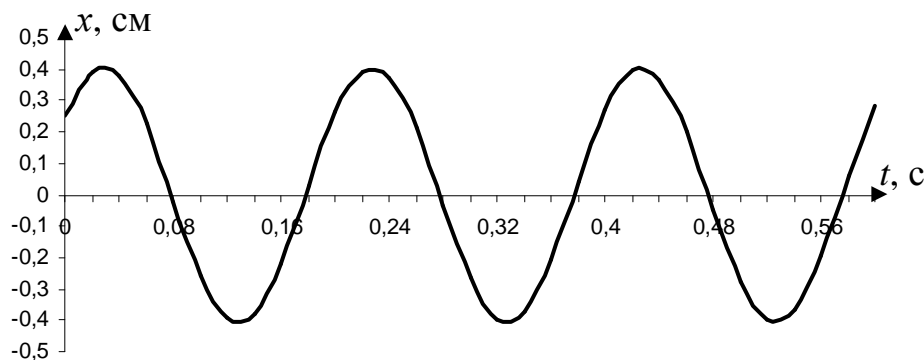
$$\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{0,1}{31,6} \approx 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t \text{ (м)}.$$

**Перевірка:** При  $t = 0$  одержимо  $x|_{t=0} = 0,25 \cdot 10^{-2}$  м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови  $x_0$ .

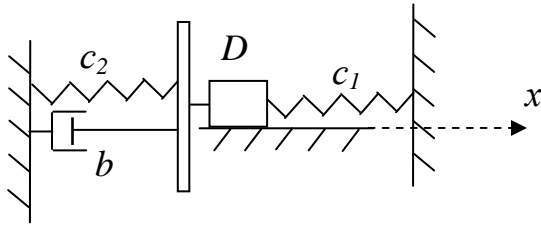
**Відповідь:** Вантаж здійснює вільні коливання за законом  $x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t$  (м), з коловою частотою  $\omega_0 = 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ , періодом (формула (10))  $T_0 = 0,2$  с і амплітудою  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,41 \cdot 10^{-2}$  м. Графік залежності координати  $x$  від часу  $t$  має вигляд



Згідно до зауваження у відповіді прикладу 1, крок за часом був обраний у 0,02 с і на графіку наведено три періоди коливань.

**Приклад 3.** Знайти рівняння коливального руху вантажу  $D$ , вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі  $x$ . Брусок, який зв'язує пружину і демпфер, є невагомим. Рух бруска, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним.

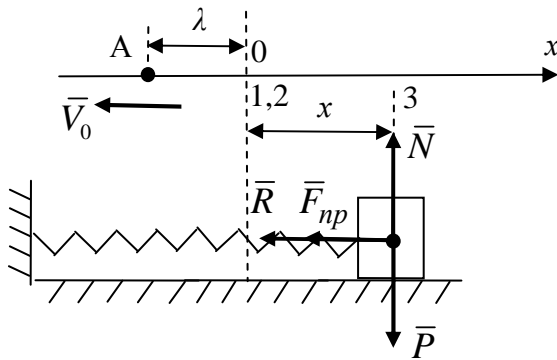
**Умова задачі.** Маса вантажу  $m_D = 4$  кг. Коефіцієнти жорсткості двох пружин  $c_1 = 2$  Н/см,  $c_2 = 3$  Н/см, коефіцієнт опору демпфера  $b = 16$  Нс/м.



Перед початком руху вантаж відхиляють на величину  $\lambda = 3$  см у напрямку від'ємного відліку координати  $x$  у момент часу  $t = 0$ , надаючи вантажу початкову швидкість  $V_0 = 0,6$  м/с, спрямовану вліво.

**Розв'язання:** Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом (див. методику § 3.4.1) і подамо її на рисунку, де рівні 1,2,3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу  $D$  (яке для горизонтальної пружини співпадає з рівнем 1; в цьому разі  $\delta_{cm} = 0$ ) і його довільне положення під час коливань, точка  $A$  – положення вантажу  $D$  в момент початку коливань,  $\vec{V}_0$  – вектор початкової швидкості,  $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{np}, \vec{R}$  – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні, сила пружності пружини та сила опору.

Схема розташування вантажу поміж двома пружинами еквівалентна паралельному з'єднанню пружних елементів (див. § 3.4.1).



Знаходимо еквівалентну жорсткість  $c$ :

$$c = c_1 + c_2 = 2 + 3 = 5 \text{ Н/см} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = -F_{np} - R = -cx - b\dot{x},$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_D} \dot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0.$$

Позначимо  $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$ ,  $2h = \frac{b}{m}$ , тоді  $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

Отримане рівняння має форму (12) диференціального рівняння вільних коливань при наявності опору. Підрахуємо значення власної частоти вільних коливань:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^2}{4}} = \sqrt{125} \approx 11,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

та коефіцієнта опору: 
$$h = \frac{b}{2m} = \frac{16}{2 \cdot 4} = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Зрівнюючи ці параметри, маємо  $h < \omega_0$  – випадок малого опору. В цьому разі функція  $x(t)$  і її перша похідна за часом  $\dot{x}(t)$  мають вигляд (13), (14)

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t),$$

$$\dot{x} = -h \cdot e^{-ht} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_0^* t + C_2 \cdot \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin \omega_0^* t + C_2 \cdot \cos \omega_0^* t).$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1, C_2$  складемо початкові умови (координата точки А (див. розрахункову схему) і проекція початкової швидкості):

$$x|_{t=0} = -\lambda, \quad \dot{x}|_{t=0} = -V_0$$

і підставимо їх у функції  $x(t)$  і  $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\lambda = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ -V_0 = -h \cdot e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0). \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування будуть

$$C_1 = -\lambda, \quad C_2 = \frac{-V_0 - h\lambda}{\omega_0^*}.$$

Підставляючи їх у функцію  $x(t)$ , отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -e^{-ht} \cdot \left( \lambda \cdot \cos \omega_0^* t + \frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} \cdot \sin \omega_0^* t \right).$$

Підрахуємо значення сталих параметрів: значення власної частоти затухаючих коливань

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

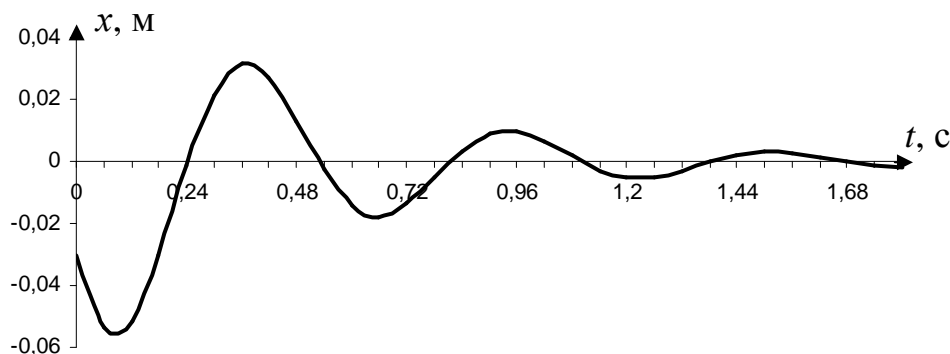
$$\frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} = \frac{0,6 + 2 \cdot 0,03}{11} = \frac{0,66}{11} \approx 0,06 \text{ м.}$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t) \text{ (м)}.$$

**Перевірка:** При  $t = 0$  одержимо  $x|_{t=0} = -0,03$  м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови  $x_0$ .

**Відповідь:** Вантаж здійснює затухаючі коливання за законом  $x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t)$  (м), з коловою частотою  $\omega_0^* = 11 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$  і періодом (див. формулу (15))  $T_0^* = 0,58$  с. Графік залежності координати  $x$  від часу  $t$  має вигляд





Згідно до зауваження у відповіді прикладу 1, крок за часом був обраний у 0,06 с і на графіку наведено три періоди коливань.

### 3.5 Загальні теореми динаміки точки

#### 3.5.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

**Кількістю руху матеріальної точки** називається вектор, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості  $\bar{Q} = m\bar{V}$ .

**Елементарним імпульсом сили**  $\bar{F}$  називається вектор  $d\bar{S} = \bar{F}dt$ .

**Імпульсом сили** за певний проміжок часу  $\tau$  називається вектор

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F}dt.$$

Проекція імпульсу сили на координатні осі визначається так:

$$S_x = \int_0^{\tau} F_x dt; \quad S_y = \int_0^{\tau} F_y dt; \quad S_z = \int_0^{\tau} F_z dt.$$

**Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки - в диференціальній формі:** перша похідна від кількості руху матеріальної точки за часом дорівнює рівнодійній сил, прикладених до точки

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{R}.$$

Цю теорему в проекціях на координатні осі можна записати так:

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = R_x; \quad \frac{d(mv_y)}{dt} = R_y; \quad \frac{d(mv_z)}{dt} = R_z.$$

– **в інтегральній формі:** зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу  $\tau = t_1 - t_0$  дорівнює імпульсу рівнодійної сили за той самий проміжок часу:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \bar{S},$$

де  $\bar{V}_0, \bar{V}_1$  – швидкість точки у моменти часу  $t_0$  і  $t_1$  відповідно.

У проекціях на осі декартової системи координат

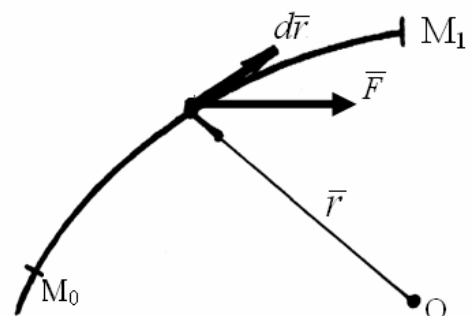
$$mv_{1x} - mv_{0x} = S_x; \quad mv_{1y} - mv_{0y} = S_y; \quad mv_{1z} - mv_{0z} = S_z.$$

#### 3.5.2 Теорема про зміну кінетичної енергії точки

**Кінетичною енергією** матеріальної точки називається скалярна величина що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2} m\bar{V}^2.$$

**Елементарна робота**  $d'A$  сили  $\bar{F}$  на елементарному (нескінченно малому)



переміщенні точки прикладення сили  $d\vec{r}$  є скалярною величиною, що визначається за формулою

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{r}}).$$

Якщо під дією сили  $\vec{F}$  матеріальна точка переміщується з положення  $M_0$  в положення  $M_1$ , то робота сили  $\vec{F}$  на шляху  $M_0 M_1$  дорівнює

$$A = \int_{M_0 M_1} d'A = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0 M_1} F \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{r}}) dr.$$

Формули для визначення елементарної і повної роботи сили в аналітичному вигляді:

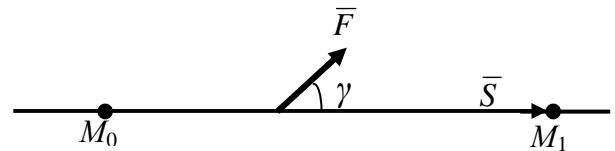
$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz;$$

$$A = \int_{M_0 M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

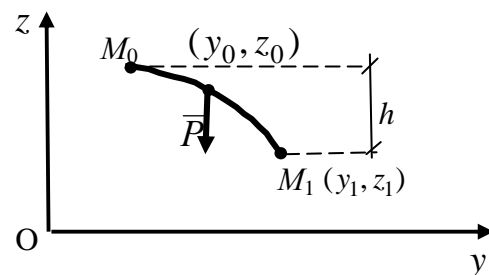
**Робота сталої** за модулем і напрямком сили  $\vec{F}$  на прямолінійному переміщенні  $\vec{S}$  точки її прикладення визначається за формулою

$$A = FS \cos(\vec{F}, \hat{\vec{S}}) = F \cdot S \cdot \cos \gamma.$$

Розмірність роботи  $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ .



**Робота сили ваги:**  $A = Ph$ ,  
де  $h = z_0 - z_1$  - різниця висот початкового і кінцевого положення точки.



**Робота сили пружності** при деформації пружини із стану  $x_1$  до стану  $x_2$  дорівнює:

$$A = \frac{c}{2} (x_1^2 - x_2^2).$$

**Теорема про зміну кінетичної енергії точки:**

- у диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, прикладених до точки, або

$$dT = d(mv^2 / 2) = d'A;$$

- в інтегральній формі: приріст кінетичної енергії матеріальної точки на скінченій ділянці шляху дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, прикладених до точки, на тій самій ділянці шляху, або

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = A,$$

де  $v_1$  - швидкість точки в кінці пройденого шляху;  $v_0$  - швидкість точки на

початку шляху (початкова швидкість);  $A = \sum_{i=1}^n A_i$  – алгебраїчна сума робіт усіх сил, прикладених до точки, на пройденому шляху.

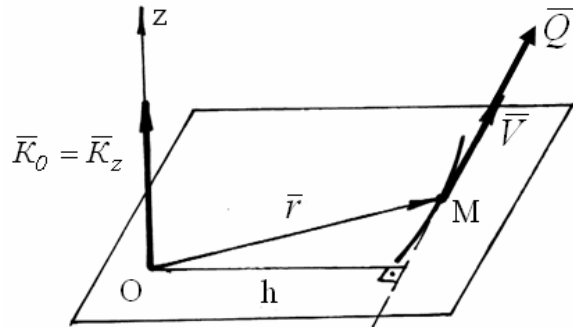
### 3.5.3 Терема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

**Момент кількості руху** матеріальної точки відносно центра  $O$  є вектором, що дорівнює векторному добуткові радіуса-вектора точки, початок якого є в точці  $O$ , на кількість руху цієї точки

$$\bar{K}_0 = \bar{M}_0(\bar{Q}) = \bar{r} \times \bar{Q} = \bar{r} \times m\bar{v}.$$

**Момент кількості руху матеріальної точки відносно координатної осі:**

$$K_z = M_z(\bar{Q}) = \pm m v h.$$



Теорема про зміну **моменту кількості руху** матеріальної точки: похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра  $O$  дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до цієї точки, відносно того ж центра

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{R}).$$

В проекціях на осі прямокутної системи координат теорему можна записати у вигляді трьох рівнянь:

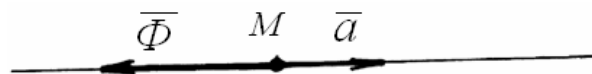
$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i); \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i).$$

Отже похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює моменту рівнодійної сили відносно тієї ж осі.

### 3.6 Принцип Даламбера для матеріальної точки

**Сила інерції** матеріальної точки  $\bar{\Phi}$  за величиною дорівнює добутку маси точки на величину її прискорення і напрямлена протилежно вектору прискорення точки

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}; \quad \Phi = ma.$$



При русі точки по кривій силу інерції можна подати як суму двох складових:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_\tau,$$

де

$$\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n; \quad \Phi_n = m \frac{v^2}{\rho};$$

$$\bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau; \quad \Phi_\tau = m \frac{dv}{dt}.$$

Принцип Даламбера для невільної матеріальної точки: при русі матеріальної точки активні сили і реакції в'язей, а також сила інерції матеріальної точки, якщо її умовно прикласти, являють собою зрівноважену систему сил:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0,$$

де  $\bar{F}$  – рівнодійна активних сил;  $\bar{R}$  – рівнодійна реакцій в'язей;  $\bar{\Phi}$  – сила інерції точки.

#### **4 ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ І ТВЕРДОГО ТІЛА**

**Механічною системою** (матеріальною системою) називається сукупність матеріальних точок, положення і рух кожної з яких залежать від положення і руху інших.

Сили, що діють на механічну систему, поділяються на зовнішні й внутрішні.

**Зовнішні сили**  $\bar{F}^e$  – це сили взаємодії точок механічної системи з тілами, що не належать даній системі.

**Внутрішні сили**  $\bar{F}^i$  – це сили взаємодії між точками механічної системи.

Властивості внутрішніх сил:

- 1) Головний вектор внутрішніх сил системи дорівнює нулю:  $\bar{F}^i = 0$ .
- 2) Головний момент внутрішніх сил системи відносно будь-якої точки дорівнює нулю:  $\bar{M}_0(\bar{F}^i) = 0$ .

**Маса** механічної системи дорівнює сумі мас усіх точок системи:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

**Центром мас** механічної системи називається геометрична точка, радіус-вектор якої визначається за формулою

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Координати центра мас визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

За визначенням центр мас є геометричною (а не матеріальною) точкою. Центр ваги системи збігається з центром мас.

#### 4.1 Теорема про рух центра мас механічної системи

**Теорема.** Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил системи:

$$M\bar{a}_c = \bar{F}^e.$$

Диференціальні рівняння руху центра мас у проекціях на осі декартової системи координат:

$$M\ddot{x}_c = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e; \quad M\ddot{y}_c = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e; \quad M\ddot{z}_c = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e.$$

Ці рівняння є також диференціальними рівняннями поступального руху абсолютно твердого тіла.

Внутрішні сили не входять в ці рівняння і безпосередньо не впливають на рух центра мас механічної системи. У змінюваній системі внутрішні сили викликають рух точок системи, змінюють їх взаємне розташування, не змінюючи положення центра мас.

У ряді випадків внутрішні сили є причиною появи зовнішніх сил, які викликають рух центра мас. Наприклад, в колісних транспортних засобах (трамвай, тролейбус, автомобіль та ін.) внутрішні сили двигуна впливають на їх рух через сили тертя між ведучими колесами та опорною поверхнею (рейками, шляхом).

Наслідки з теореми (закон збереження руху центра мас).

1) Якщо  $\bar{F}^e = 0$ , то  $\bar{a}_c = 0$  і  $\bar{v}_c = \text{const}$  – центр мас системи рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться у стані спокою.

2) Якщо  $\bar{F}_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e = 0$ , то  $a_{cx} = \ddot{x}_c = 0$  і  $v_{\rightarrow} = \dot{x}_c = \text{const}$  – проекція швидкості центра мас на вісь є сталою величиною.

#### 4.2 Теорема про зміну кількості руху механічної системи

**Кількістю руху механічної системи** називається вектор, що дорівнює геометричній сумі кількостей руху всіх матеріальних точок системи:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i.$$

Кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на вектор швидкості її центра мас:

$$\bar{Q} = M \cdot \bar{v}_c.$$

**Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок**

- у диференціальній формі: похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, діючих на систему:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}^e;$$

у проекціях на осі координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e.$$

- в інтегральній формі: зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу  $t_1 - t_0 = \tau$  дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил, діючих на точки системи, за той же відрізок часу:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e,$$

де  $\bar{Q}_1$  і  $\bar{Q}_0$  – кількість руху системи в кінцевий  $t_1$  і початковий  $t_0$  моменти часу;  $\bar{S}^e = \int_0^\tau \bar{F}^e dt$  – імпульс головного вектора зовнішніх сил системи за даний відрізок часу  $\tau$ .

**Наслідки з теореми (закон збереження кількості руху системи):**

1) Якщо  $\bar{F}^e = 0$ , то  $\bar{Q} = const$  – кількості руху системи залишається незмінною;

2) Якщо  $\bar{F}_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e = 0$ , то  $\bar{Q}_x = const$  – проекція кількості руху системи на вісь  $Ox$  є сталою.

**4.3 Теорема про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту) механічної системи**

Головним моментом кількості руху або кінетичним моментом  $\bar{K}_O$  відносно будь-якої нерухомої точки  $O$  називається геометрична сума моментів кількості руху всіх точок системи відносно даної точки:

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{K}_{Oix} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_K \times \bar{Q}_K = \sum_{i=1}^n \bar{r}_K \times m_K \bar{V}_K.$$

Кінетичним моментом системи відносно даної осі (алгебраїчна величина) називається сума моментів кількості руху матеріальних точок системи відносно даної осі:

$$\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k}$$

або 
$$K_z = \sum_{i=1}^n K_{oz}.$$

**Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи:** похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якої нерухомої точки дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно тієї ж точки:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^e,$$

де  $\bar{M}_0^e = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i^e)$  – головний момент усіх зовнішніх сил, діючих на систему, відносно даної точки  $O$ .

Проектуючи векторне рівняння на осі декартової нерухомої системи координат, одержуємо

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i^e); \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i^e); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i^e).$$

Отже, похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює головному моменту зовнішніх сил, діючих на систему, відносно тієї ж осі.

**Закон** збереження кінетичного моменту системи відносно точки й осі запишеться у вигляді:

1) Якщо  $\bar{M}_0^e = 0$ , то  $\bar{K}_0 = const$  – кінетичний момент системи відносно точки  $O$  є сталим як за величиною, так і за напрямком;

2) Якщо  $\sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i^e) = 0$ , то  $K_z = const$  – кінетичний момент системи відносно осі  $Oz$  залишається незмінним.

**4.3.1 Диференціальне рівняння обертання** твердого тіла відносно нерухомої осі  $Oz$ :

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i^e),$$

де  $J_z$  – момент інерції твердого тіла відносно осі  $z$ ;  $\omega$  – кутова швидкість тіла навколо цієї осі  $x$ ;  $M_z(\bar{F}_i^e)$  – момент  $i$ -тої зовнішньої сили відносно осі  $Oz$ .

#### 4.3.2 Моменти інерції механічної системи твердого тіла

**Моментом інерції системи відносно осі** (осьовий момент інерції) називається сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней від осі:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2.$$

Момент інерції твердого тіла:

$$J_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h_{iz}^2 \Delta m_i = \int_{(m)} h_z^2 dm,$$

де  $h_{iz}(h_z)$  – відстань від осі частинки тіла масою  $\Delta m_i(dm)$ ;  $x, y, z$  – координати частини тіла.

Осьові моменти інерції тіла:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm; \quad J_z = \int_{(m)} (y^2 + x^2) dm.$$

Поряд з осьовими моментами інерції розглядають полярні  $J_0$  (відносно полюса  $O$ ) і планарні  $J_{xoy}, J_{xoz}, J_{yoz}$  (відносно площини) моменти інерції:

$$J_0 = \int_{(m)} r^2 dm; \quad J_{xoy} = \int_{(m)} z^2 dm; \quad J_{xoz} = \int_{(m)} y^2 dm; \quad J_{yoz} = \int_{(m)} x^2 dm,$$

де  $r$  – відстань частинки від полюса  $O$ .

Полярний момент інерції дорівнює півсумі осьових моментів інерції і сумі планарних моментів інерції:

$$J_0 = J_{xoy} + J_{xoz} + J_{yoz} = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z)$$

Відцентровими моментами інерції називаються величини, що виражаються рівностями

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm; \quad J_{xz} = \int_{(m)} xz dm; \quad J_{yz} = \int_{(m)} yz dm.$$

Відцентрові моменти інерції можуть бути від'ємними і додатними. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то осі координат  $x, y, z$  називають головними осями інерції тіла в точці  $O$ , яка є полюсом системи координат. Якщо ця точка співпадає з центром мас тіла, то осі координат є головними центральними осями інерції.

У техніці широко використовується також поняття радіуса інерції тіла відносно осі.

Радіусом інерції  $\rho_z$  тіла відносно осі  $z$  називається величина, яка дорівнює відстані від осі до матеріальної точки, маса та осьовий момент інерції якої дорівнює масі та осьовому моменту інерції тіла:

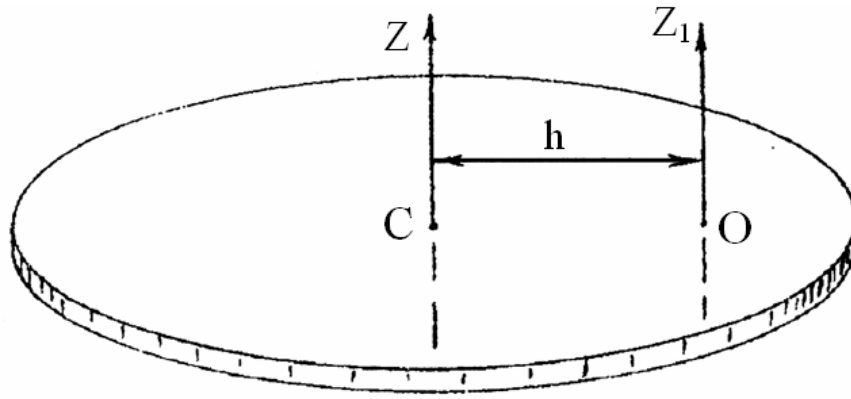
$$J_z = m\rho_z^2; \quad \rho_z = \sqrt{J_z/m}.$$

**Теорема Гюйгенса-Штейнера:** Момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції  $J_{cz}$  тіла відносно паралельної осі, що проходить через центр мас  $C$  тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані  $h$  між осями:

$$J_{z_1} = J_{Cz} + Mh^2,$$

де  $z_1$  – довільна вісь;  $z$  – вісь, що проходить через центр мас  $C$  тіла паралельно осі  $z_1$ .



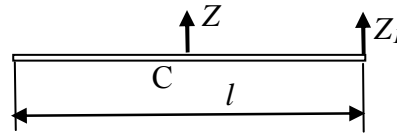


### Обчислення моментів інерції деяких однорідних тіл

#### Однорідний стержень

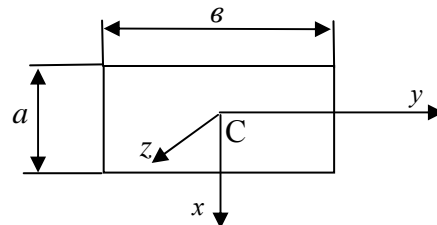
$$J_{C_z} = Ml^2 / 12; \quad J_{z_1} = Ml^2 / 3,$$

де  $M$  - маса тіла.



**Прямокутна тонка пласти-**  
на  $J_{C_x} = Mb^2 / 12; J_{C_y} = Ma^2 / 12.$

$$J_{C_z} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$



#### Порожнистий циліндр:

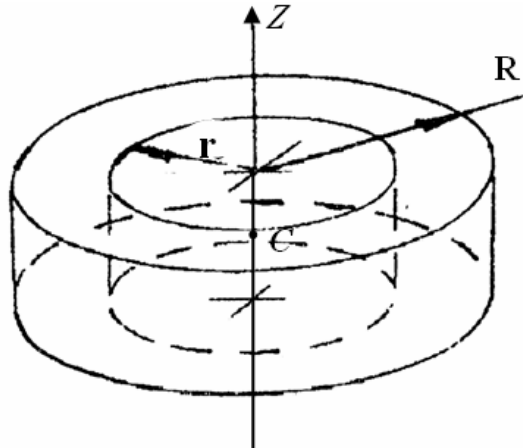
$$J_{C_z} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

**Кругла тонка циліндрична**  
оболонка (кільце)

$$(r \rightarrow R) : J_z = MR^2.$$

#### Суцільний циліндр (диск)

$$(r = 0) : J_{C_z} = MR^2 / 2.$$



### 4.4 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

**Кінетична енергія механічної системи** - це скалярна величина, яка дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок системи:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2},$$

де  $m_i$  - маса  $i$ -тої точки системи,  $v_i$  - її швидкість.

**Теорема Кеніга:** Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас системи і кінетичної енергії системи в її відносному русі

по відношенню до системи координат, яка рухається поступально разом з центром мас:

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{ri}^2}{2},$$

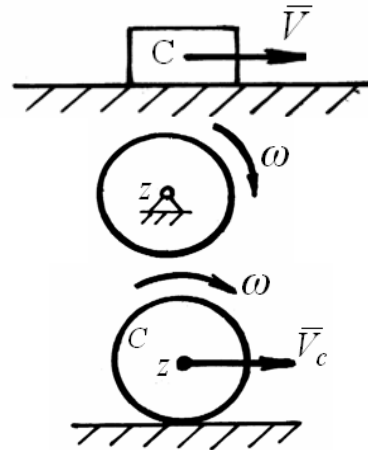
де  $m_i$  – маса  $i$ -тої точки системи;  $v_{ri}$  – відносна швидкість точки по відношенню до центра мас;  $M$  – маса всієї системи;  $v_c$  – швидкість центра мас системи. Кінетична енергія твердого тіла визначається за формулами:

при поступальному русі  $T = \frac{M v_c^2}{2};$

при обертальному русі навколо нерухомої осі  $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2;$

при плоскопаралельному русі

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{1}{2} J_{C_z} \omega^2,$$



де  $M$  – маса тіла,  $v_c$  – швидкість центра мас тіла;  $I_z, I_{C_z}$  – момент інерції тіла відносно осі  $z$  (вісь обертання) або осі  $z$ , що проходить через центр мас;  $\omega$  – кутова швидкість тіла.

#### **Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи:**

- у диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи:

$$dT = \sum_{i=1}^n d'A_i^e + \sum_{i=1}^n d'A_i^i;$$

- в інтегральній формі: зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок на певному переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил на тому самому переміщенні:

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e + \sum_{i=1}^n A_i^i,$$

де  $T_1$  і  $T_0$  – кінетична енергія системи в кінці і на початку шляху;  $\sum A_i^e$

– сума робіт зовнішніх сил;  $\sum A_i^i$  – сума робіт внутрішніх сил.

**Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $z$ , дорівнює добутку моменту сили відносно даної осі на кут повороту тіла:**

$$d'A = M_z(\bar{F})d\varphi; \quad A = \int_0^\varphi M_z(\bar{F})d\varphi,$$

де  $M_z(\bar{F})$  – момент сили відносно осі;  $d\varphi, \varphi$  – елементарний і певний кут повороту тіла.

У випадку сталого моменту ( $M_z = \text{const}$ ) отримаємо  $A = M_z(\bar{F})\varphi$ .

**Елементарна робота сил, прикладених до твердого тіла, що вільно рухається,** дорівнює сумі роботи головного вектора  $\bar{F}$  системи сил на елементарному переміщенні  $d\bar{r}_0$  полюса  $O$  і роботи головного моменту  $\bar{M}_0$  цієї системи сил відносно полюса на елементарному обертальному переміщенні:

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + \bar{M}_0 \cdot d\bar{\varphi}.$$

**Потужність**  $N$  є фізичною величиною, що характеризує швидкість, з якою виконується робота

$$N = \bar{F} \cdot \bar{V} = F_\tau \cdot V = M_z \cdot \omega,$$

де  $\bar{V}$  – швидкість точки прикладення сили,  $F_\tau$  – проекція сили на дотичну,  $M_z(\bar{F})$  – момент сили відносно осі обертання,  $\omega$  – кутова швидкість тіла. За одиницю потужності прийнято Вт ( $1\text{Вт} = 1\text{Н} \cdot \text{м} / \text{с} = 1\text{Дж} / \text{с}$ ).

#### 4.5 Принцип Даламбера для механічної системи

**Принцип Даламбера для матеріальної системи:** при русі системи матеріальних точок геометрична сума головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю; геометрична сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції відносно деякого нерухомого  $O$  центра дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i + \sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i) + \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{R}_i) + \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{\Phi}_i) = 0.$$

Сили інерції тіла приводяться:

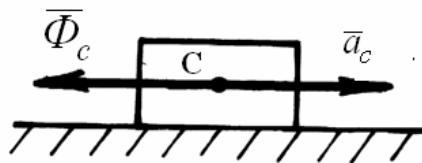
- при поступальному русі до рівнодійної сил інерції  $\bar{\Phi}_C$ :

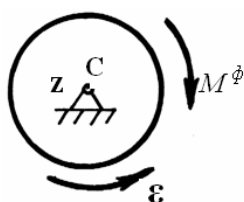
$$\bar{\Phi}_C = -M\bar{a}_C,$$

яка прикладена у центрі мас;

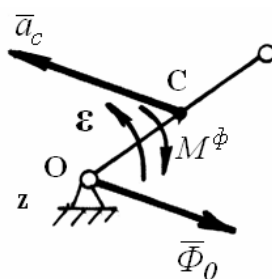
- при обертальному русі до головного моменту сил інерції  $\bar{\Phi}_C$  та головного вектора сил інерції  $\bar{\Phi}$ , який прикладений в точці  $O$  на осі обертання:

$$\bar{M}_z^\Phi = -I_z \bar{\varepsilon}; \quad \bar{\Phi}_0 = -M\bar{a}_C;$$





- вісь  $z$  - головна  
центральна вісь  
інерції:  
 $\bar{M}_C^\phi = I_{Cz} \bar{\varepsilon}$ ;  
 $\Phi_C = 0$ ;

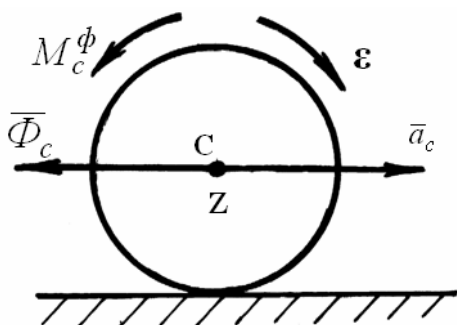


$$M_z^\phi = I_z \varepsilon;$$

$$\Phi_0 = Ma_C;$$

- при плоскопаралельному русі – до головного вектора сил інерції  $\bar{\Phi}_C$ , який прикладений до центра мас, та головного моменту сил інерції  $\bar{M}_{Cz}^\phi$ :

$$\Phi_C = -Ma_C; \quad \bar{M}_{Cz}^\phi = -I_{Cz} \bar{\varepsilon},$$



де  $M$  – маса тіла;  $\bar{a}_c$  – прискорення центра мас тіла;  $\bar{\varepsilon}$  – кутове прискорення обертального руху;  $I_z, I_{Cz}$  – моменти інерції тіла відносно осі обертання  $z$  та осі  $z$ , що проходить через центр мас.

## 4.6 Елементи аналітичної механіки

### 4.6.1 Класифікація в'язей

Розрізняють вільні й невідільні механічні системи. Механічна система називається вільною, якщо рух її точок необмежений ніякими сторонніми тілами (в'язями). Якщо рух механічної системи обмежений в'язями, то вона називається невідільною.

**Класифікація в'язей.** Обмеження, які в'язі накладають на механічну систему, аналітично виражаються у вигляді співвідношень (рівнянь або нерівностей) між часом, координатами і швидкостями матеріальних точок, що утворюють систему.

**Геометричні** (скінченні) в'язі – це такі в'язі, до рівняння яких не входять швидкості точок системах:

$$f(t, x_i, y_i, z_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Кінематичні** (диференціальні) в'язі - це такі в'язі, до рівняння яких входять швидкості точок системи:

$$f(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Якщо рівняння кінематичної в'язі після інтегрування можна перетворити у рівняння геометричної в'язі, то така кінематична в'язь називається **голомною** (інтегрованою). У протилежному випадку кінематична в'язь називається **неголомною** (неінтегрованою).

**Стационарні в'язі** – це в'язі, до рівнянь яких час не входить у явному вигляді.

**Нестационарні в'язі** – це в'язі, до рівнянь яких час входить у явному

вигляді.

**Двобічні** (утримуючі) в'язі – це в'язі, що обмежують рух точок механічної системи у двох взаємно протилежних напрямках зовнішніх нормалей до поверхні в'язі.

**Однобічні** (неутримуючі) в'язі – це в'язі, що обмежують рух точок механічної системи в якомусь одному напрямі зовнішньої нормалі до поверхні в'язі і не обмежують його в протилежному напрямі.

Утримуючі в'язі аналітично виражаються рівнянням

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0,$$

а неутримуючі - нерівностями

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leq 0.$$

#### 4.6.2 Принцип можливих переміщень

**Можливими** (або віртуальними) *переміщеннями* системи називаються умовні нескінченно малі її незалежні переміщення, що дозволяються в'язями системи в даний момент часу (в даному положенні системи).

**Ідеальні в'язи** – це такі в'язі, сума робіт реакцій яких на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0.$$

Приклади ідеальних в'язей: абсолютно гладенька поверхня (напрямні); ідеальні шарніри (підшипник), стержні та ін.

**Принцип можливих переміщень:** для рівноваги системи зі стаціонарними двобічними ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил, діючих на систему, на будь-якому можливому переміщенні системи з даного її положення рівноваги дорівнювала нулю:

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^a = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta \bar{S}_i = 0$$

або в скалярній формі 
$$\sum_{i=1}^n F_i \delta S_i \cos(\bar{F}_i, \delta \bar{S}_i) = 0$$

або в аналітичній формі 
$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0.$$

#### 4.6.3 Узагальнені координати, швидкості та узагальнені сили

**Узагальненими координатами**  $q_1, q_2, \dots, q_S$  називають такі незалежні один від одного параметри, при завданні яких можна однозначно визначити положення усіх точок системи. Такими параметрами можуть бути декартові

координати, кути, віддалі та ін. Число  $S$  цих незалежних параметрів називають **числом ступенів вільності** механічної системи.

Похідні за часом від узагальнених координат, тобто величини  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S$ , називаються **узагальненими швидкостями** системи.

Обчислимо роботу прикладених до точок системи активних сил  $\bar{F}_k$  на можливому переміщенні системи:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^S \left( \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^S Q_i \cdot \delta q_i,$$

$$\text{де } Q_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, S.$$

Величини  $Q_1, Q_2, \dots, Q_S$ , що є множниками при можливих (віртуальних) переміщеннях узагальнених координат у формулі роботи активних сил на можливому переміщенні системи, називаються **узагальненими силами**.

Щоб обчислити узагальнену силу  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ), досить надати можливе переміщення координаті  $q_i$  і визначити роботу  $\delta A_i$  активних сил на переміщеннях точок системи, які зумовлені тільки зміною координати  $q_i$ .

Маємо  $Q_i = \delta A_i / \delta q_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, S$ ).

Якщо активні сили є потенціальними то узагальнені сили дорівнюватимуть частинним похідним від потенціальної енергії  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_S)$  по узагальнених координатах:

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

#### 4.6.4 Рівняння динаміки системи

**Загальне рівняння** При русі системи, підпорядкованої голономним двостороннім ідеальним в'язям, сума робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{q}_k + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{q}_k = 0$$

або  $Q_i + Q_i^{in} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ),

де  $\bar{\Phi}_k$  – сила інерції точки;  $Q_i^{in}$  – узагальнена сила інерції;  $\delta \bar{q}_k$  – можливе переміщення точки.

**Рівняння Лагранжа II** роду мають такий вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, S),$$

де  $T$  – кінетична енергія системи, представлена як функція узагальнених

координат, узагальнених швидкостей і часу;  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial q_i}$  – частинні похідні кінетичної енергії по узагальнених швидкостях і координатах.

#### 4.7 Удар

**Удар** – явище, при якому швидкості точок тіла за дуже малий (близький до нуля) проміжок часу змінюються на скінченну величину.

**Ударні сили** – сили, при дії яких відбувається удар. Ударні сили діють протягом дуже малого проміжку часу і досягають дуже великих значень.

В теорії удару в якості міри взаємодії розглядають не самі ударні сили, а їх імпульси.

**Ударний імпульс** – вектор, який визначається за формулою

$$\bar{S}^{y\partial} = \int_0^{\tau} \bar{F}^{y\partial} dt,$$

де  $\tau$  – тривалість удару.

**Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки при ударі** (основне рівняння теорії удару матеріальної точки): зміна кількості руху матеріальної точки під час удару дорівнює геометричній сумі ударних імпульсів, які діють на точку:

$$m(\bar{U} - \bar{V}) = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i^{y\partial},$$

де  $\bar{U}, \bar{V}$  – швидкості точки після і до удару відповідно.

**Коефіцієнт відновлення при ударі:**

$$K = \frac{|U_n^{ei\partial}|}{|V_n^{ei\partial}|}, \quad 0 \leq K \leq 1,$$

де  $|U_n^{ei\partial}|$ ,  $|V_n^{ei\partial}|$  – модулі нормальних складових відносної швидкості точки торкання тіл після і до удару відповідно.

*Окремі випадки:* 1)  $K = 1$  – абсолютно пружний удар (тіла, що співударяються, після удару мають різні швидкості);

2)  $K = 0$  – абсолютно непружний удар (тіла, що співударяються, після удару рухаються як одне тіло).

**Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі:**

зміна кількості руху системи під час удару дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх ударних імпульсів, які діють на систему:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i^{y\partial},$$

де  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_0$  – кількість руху системи після і до удару відповідно.

**Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі:** зміна головного моменту кількості руху системи відносно нерухомого полюса  $A$  під час удару дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх ударних імпульсів відносно того ж полюса:

$$\bar{K}_{A_1} - \bar{K}_{A_0} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_A(\bar{S}_i^{y\partial}),$$

де  $\bar{K}_{A_1}, \bar{K}_{A_0}$  – головні моменти кількості руху системи відносно полюса  $A$  після і до удару відповідно.

Удар називається **центральною**, якщо нормаль до поверхонь тіл, що співударяються, в точці їх дотику (лінія удару) проходить через центри мас цих тіл.

Удар називається **прямим**, якщо швидкості тіл, що співударяються, напрямлені по лінії удару. В протилежному випадку удар називається **косим**.

Основні рівняння **прямого центрального** удару:

$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 U_{1x} + m_2 U_{2x}; \quad k = \frac{U_{2x} - U_{1x}}{V_{1x} - V_{2x}},$$

де  $V_{1x}, V_{2x}$  – проекції швидкості тіл до удару на вісь  $x$ , що співпадає з лінією удару;  $U_{1x}, U_{2x}$  – проекції швидкості тіл на вісь  $x$  після удару;  $m_1, m_2$  – маси тіл;  $k$  – коефіцієнт відновлення.

**Теорема Остроградського-Карно:**

$$T_1 - T_0 = \frac{1-k}{1+k} \left( \frac{1}{2} m_1 (V_{1x} - U_{1x})^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_{2x} - U_{2x})^2 \right);$$

де  $T_0 - T_1$  – втрата кінетичної енергії двох тіл при ударі;  $T_0, T_1$  – кінетичні енергії системи до і після удару відповідно;  $(V_{1x} - U_{1x}), (V_{2x} - U_{2x})$  – втрачені швидкості.

У випадку **косого удару** мають місце рівняння

$$m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n} = m_1 U_{1n} + m_2 U_{2n}; \quad k = \frac{U_{2n} - U_{1n}}{V_{1n} - V_{2n}},$$

де  $V_{1n}, V_{2n}$  і  $U_{1n}, U_{2n}$  – проекції швидкостей тіл на вісь  $n$ , що проходить через центри мас цих тіл до удару і після нього.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

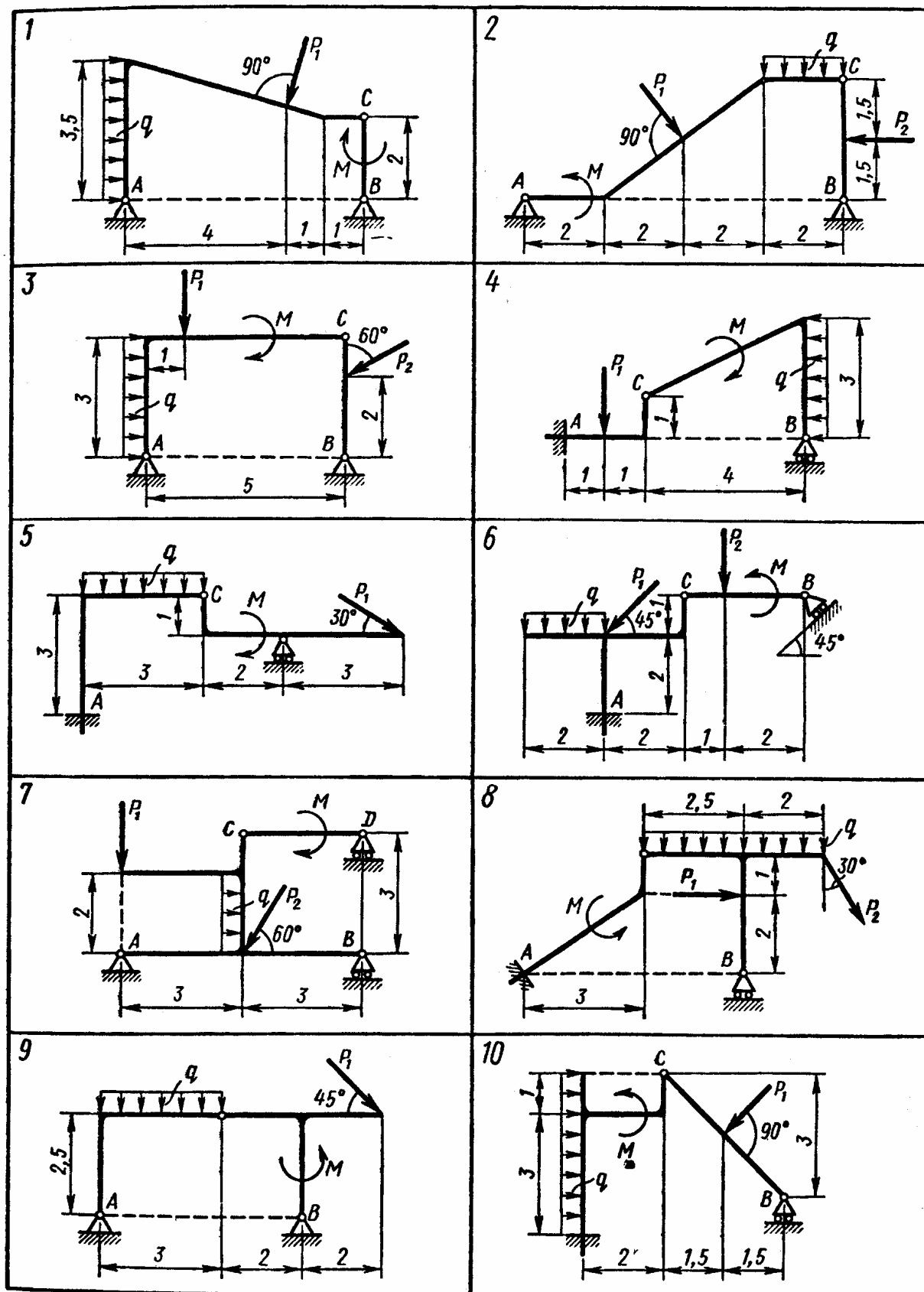
1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский. – М., 1977. – Ч. 1, 2.
2. Путята Т.В. Методика роз'язання задач з теоретичної механіки / Т.В. Путята, Б.Н. Фрадлін. – К., 1955.
3. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1979. – Ч. 1, II.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М., 1986.
5. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать и др. – М., 1986. – Ч. 1, 2.
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – М., 1967. – Ч.1,2.
7. Воронков И.М. Курс теоретической механики / И.М. Воронков. – М., 1965.
8. Гернет М.Н. Курс теоретической механики / М.Н. Гернет. – М., 1981.
9. Добронравов В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.Л. Дворников. – М., 1974.
10. Кільчевський М.О. Курс теоретичної механіки / М.О. Кільчевський. – К., 1972-1977. – Т. 1,2.
11. Кильчевский Н.А. Основы теоретической механики / Н.А. Кильчевский, Н.И. Ремизова, Е.Н. Кильчевская. – К., 1986.
12. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.А. Лурье. – М., 1984. – Т. 1,2.
13. Павловський М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловський. – К., 2002. – Ч. 1,2.
14. Попов М.В. Теоретическая механика / М.В. Попов. – М., 1986.
15. Савин Г.Н. Курс теоретической механики / Г.Н. Савин, Т.В. Путята, Б.Н. Фрадлин. – К., 1973.
16. Сахарный Н.Ф. Курс теоретической механики / Н.Ф. Сахарный. – М., 1964.
17. Старжинский В.М. Теоретическая механика / В.М. Старжинский. – М., 1980.
18. Глонь О.А. Основы теоретичної механіки / О.А. Глонь. – К., 1997.
19. Шпачук В.П. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей / В.П. Шпачук, М.С. Золотов, О.І. Рубаненко, А.О. Гарбуз. – Харків: ХДАМГ, 2007.

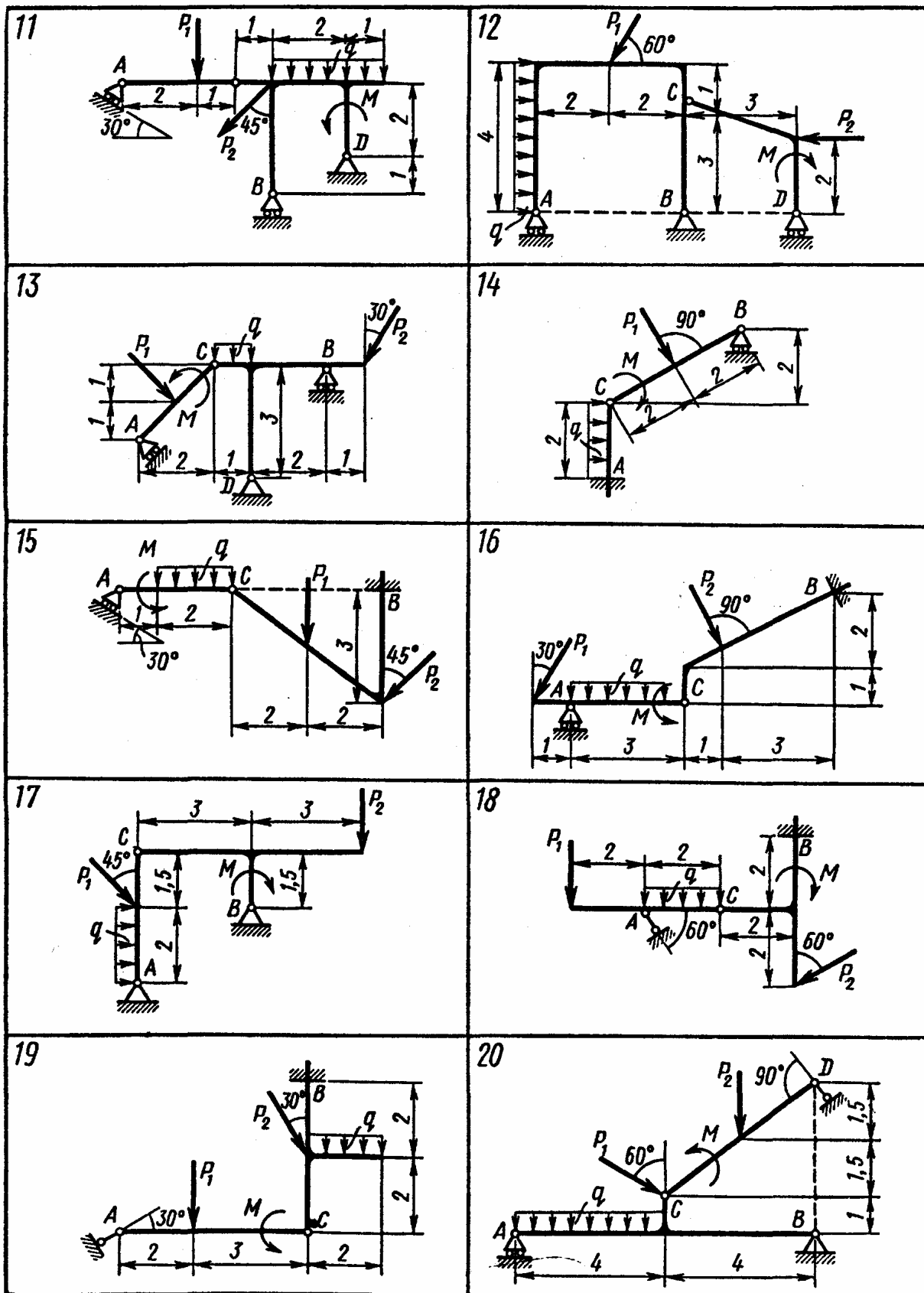
## Додаток 1

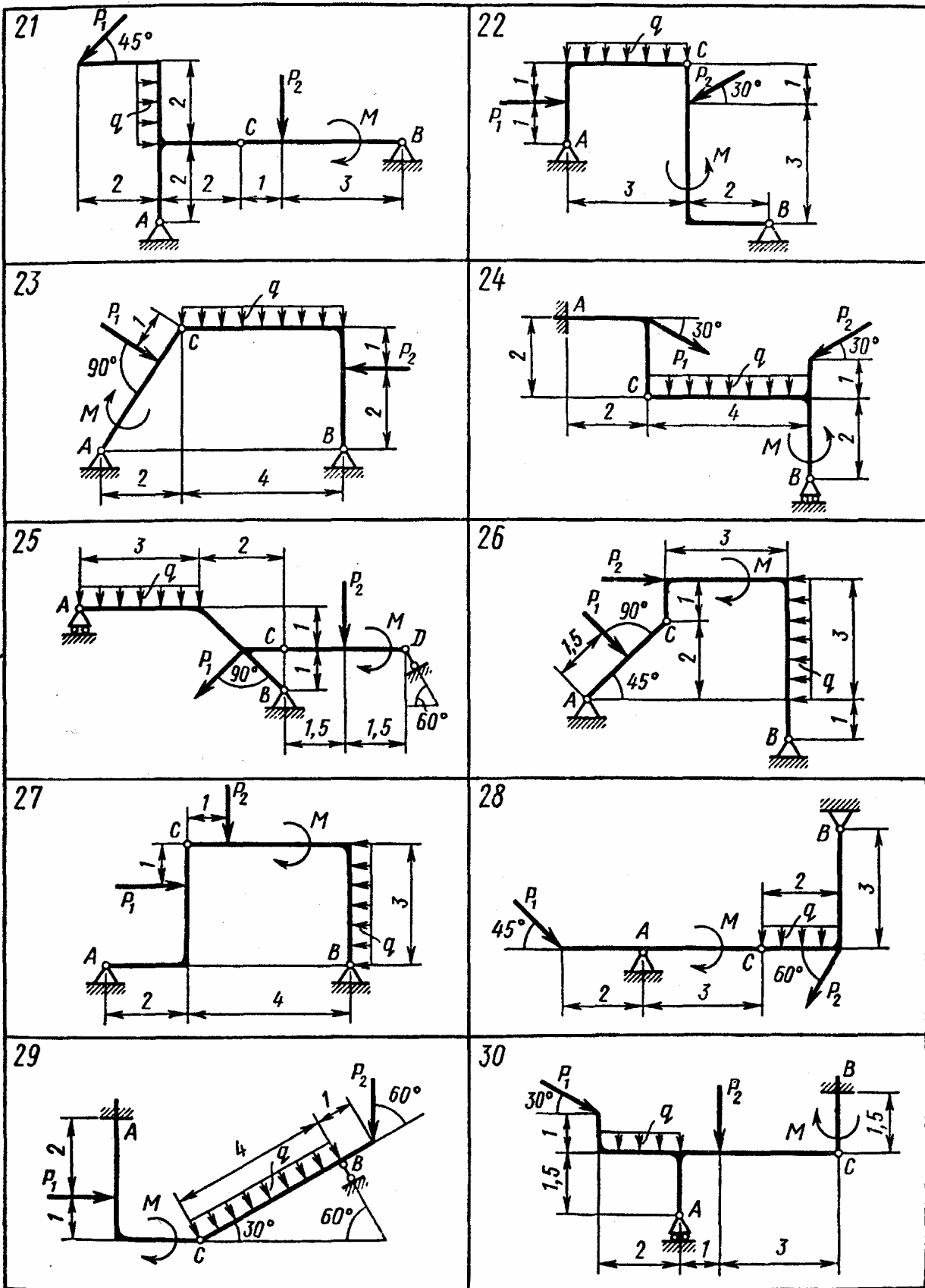
### Завдання для роботи «Визначення реакцій опор системи тіл2

Конструкція складається з двох тіл. Визначити реакцію опор  $A$  і  $B$ , а також тиск у проміжному шарнірі  $C$ . Методика розв'язання задач розглянута у розділі 1.7.

Номер варіанту	$P_1$	$P_2$	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м
	кН			
1	5,0	-	24,0	0,8
2	6,0	10,0	22,0	1,0
3	7,0	9,0	20,0	1,2
4	8,0	-	18,0	1,4
5	9,0	-	16,0	1,6
6	10,0	8,0	25,0	1,8
7	11,0	7,0	20,0	2,0
8	12,0	6,0	15,0	2,2
9	13,0	-	10,0	2,4
10	14,0	-	12,0	2,6
11	15,0	5,0	14,0	2,8
12	12,0	4,0	16,0	3,0
13	9,0	6,0	18,0	3,2
14	6,0	-	20,0	3,4
15	5,0	8,0	22,0	3,6
16	7,0	10,0	14,0	3,8
17	9,0	12,0	26,0	4,0
18	11,0	10,0	18,0	3,5
19	13,0	9,0	30,0	3,0
20	15,0	8,0	25,0	2,5
21	10,0	7,0	20,0	2,0
22	5,0	6,0	15,0	1,5
23	8,0	5,0	10,0	1,4
24	11,0	4,0	5,0	1,3
25	14,0	6,0	7,0	1,2
26	12,0	8,0	9,0	1,1
27	10,0	7,0	11,0	1,0
28	8,0	9,0	13,0	1,2
29	5,0	7,0	10,0	1,5
30	10,0	12,0	17,0	1,6





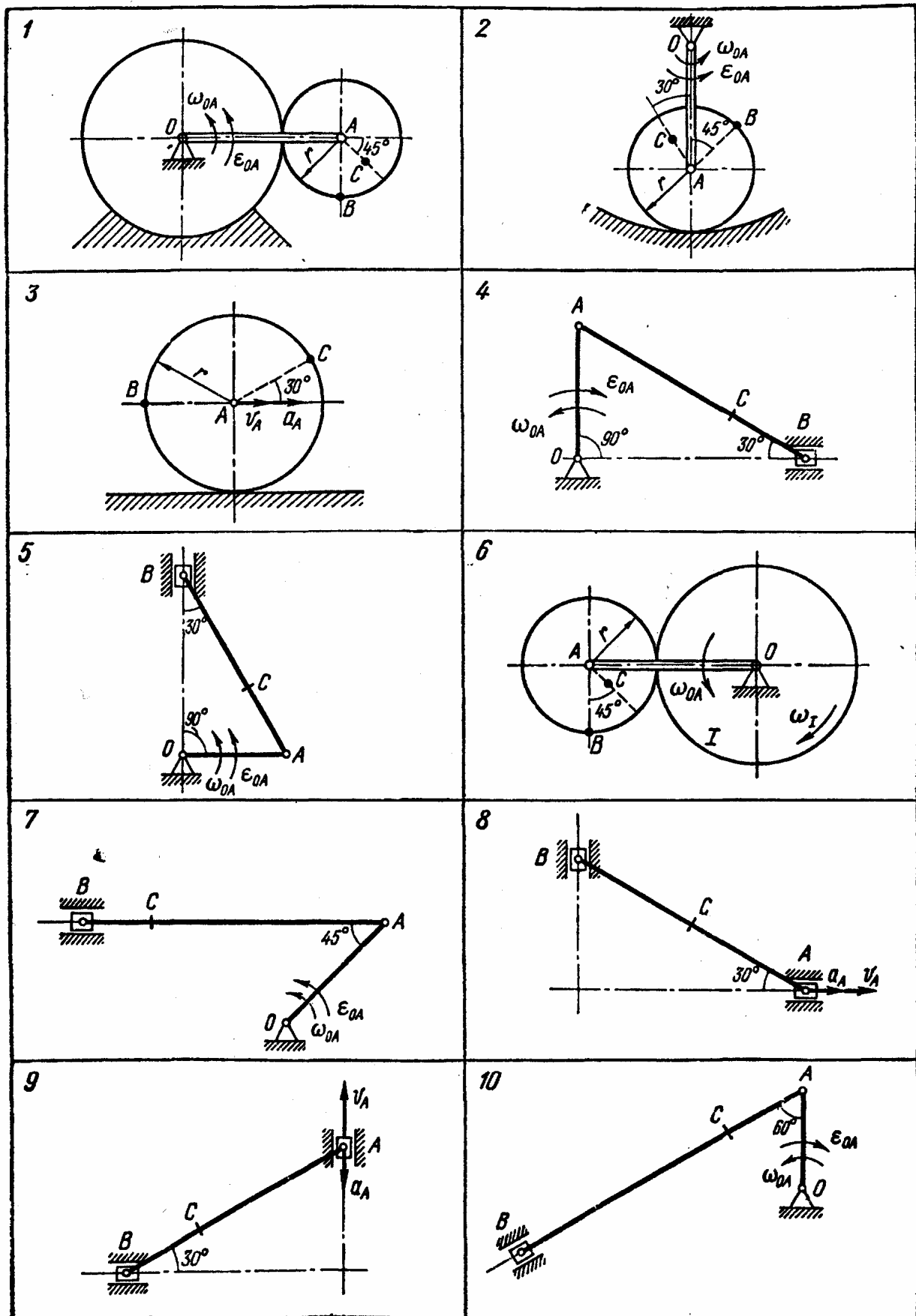


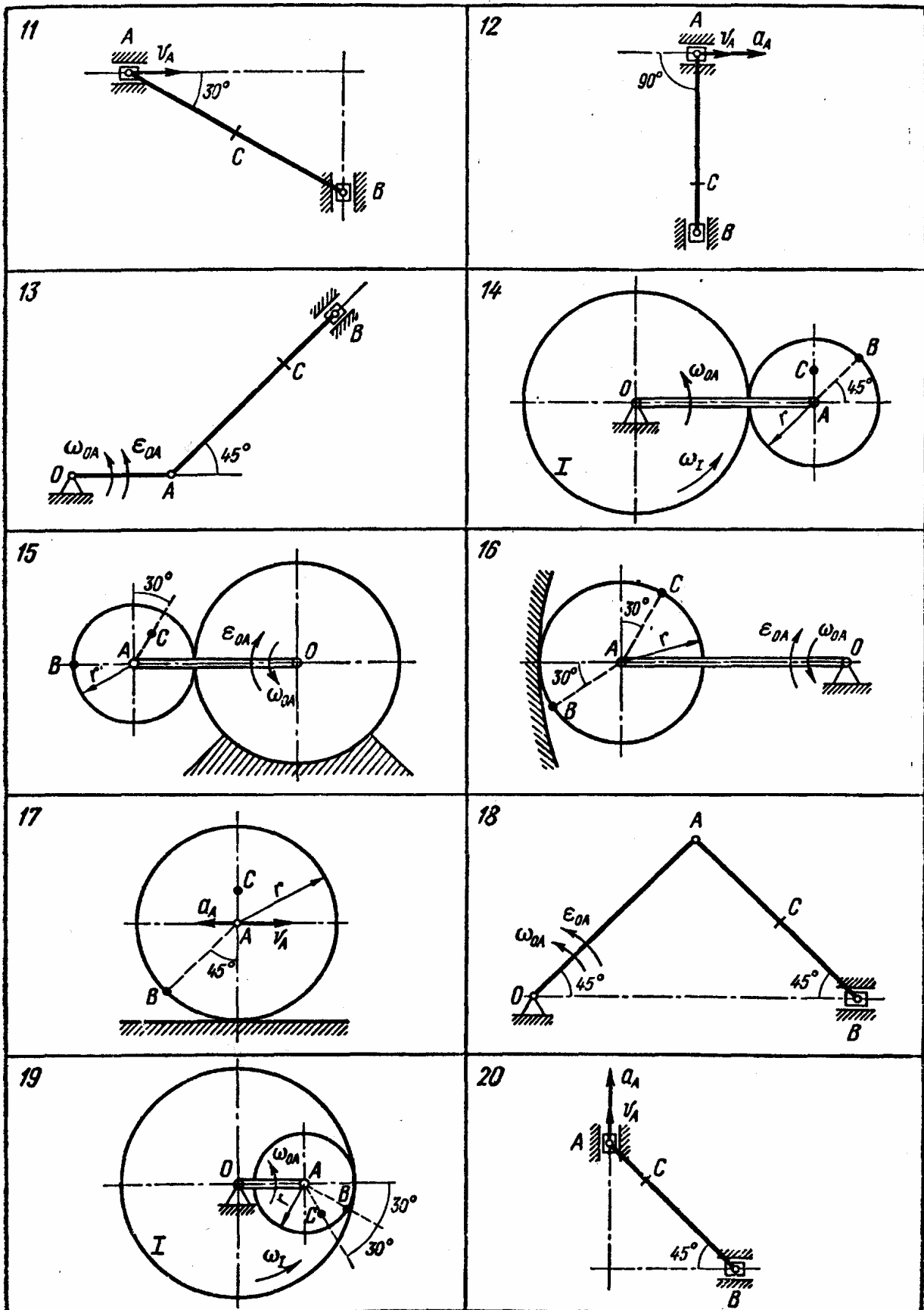
## Додаток 2

### Завдання для роботи «Кінематичний аналіз плоского механізму»

Визначити для заданого положення механізму швидкість і прискорення точки  $B$  і  $C$ , а також кутову швидкість і кутове прискорення ланки, до якої належить точка  $C$ . Схеми механізмів наведені на наступних сторінках, а необхідні для розрахунку розміри і кінематичні параметри представлені у таблиці, де  $\omega_{OA}, \varepsilon_{OA}$  – кутова швидкість і кутове прискорення кривошипа  $OA$  для заданого положення механізму;  $\omega_I$  – кутова швидкість колеса  $I$  (стала);  $V_A, a_A$  – швидкість і прискорення точки  $A$ . Кочення коліс відбувається без ковзання. Методика розв’язання задач розглянута у розділі 2.5.2.

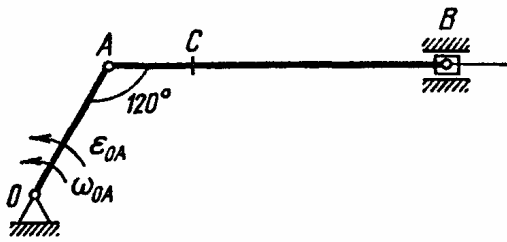
Номер варіанту	Розміри, см				$\omega_{OA}$ , рад/с	$\omega_I$ , рад/с	$\varepsilon_{OA}$ , рад/с <sup>2</sup>	$V_A$ , см/с	$a_A$ , см/с <sup>2</sup>
	$OA$	$r$	$AB$	$AC$					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-



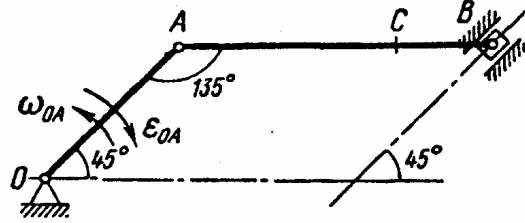




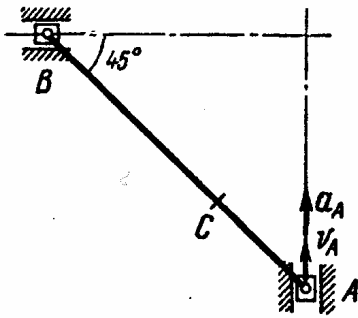
21



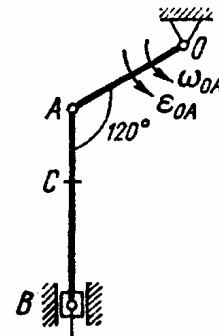
22



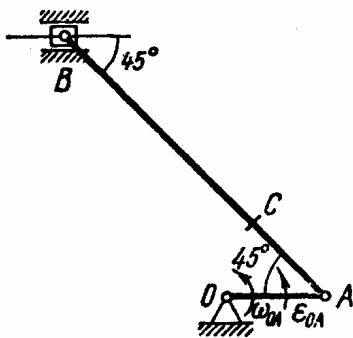
23



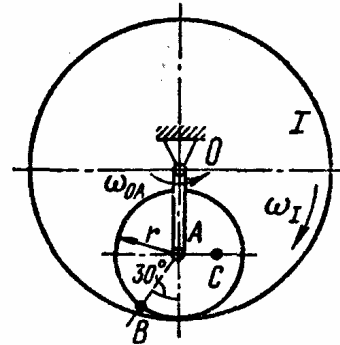
24



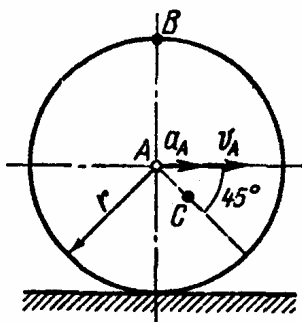
25



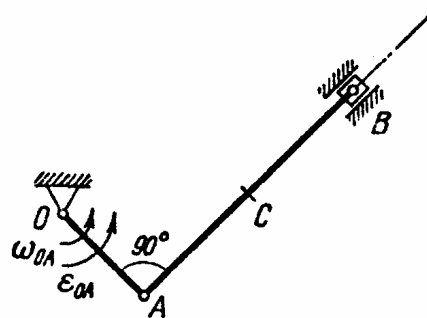
26



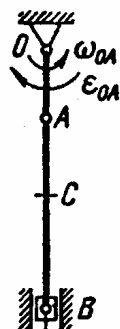
27



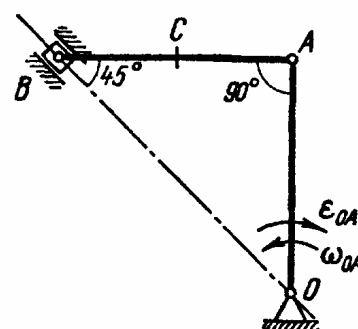
28



29



30



**Методика розв'язання задач та завдання для роботи**  
**«Дослідження коливального руху матеріальної точки»**

Розв'язання задач завдання слід проводити в такій послідовності:

- визначити тип механічної системи, вид схеми з'єднання пружних елементів вихідної схеми, вид коливального руху вантажу, а також засіб збудження його коливань;
- перетворити (у випадку необхідності) вихідну схему в розрахункову з одним пружним елементом, показати на розрахунковій схемі вісь  $Ox$ , і напрямки кінематичного збудження  $\xi$ , силу ваги  $\bar{P}$  вантажу, сили пружності  $\bar{F}_y$  та опору  $\bar{R}$  пружини, положення статичної рівноваги вантажу (точка  $O$  на осі  $Ox$ ), положення вантажу в момент початку ( $t = 0$ ) руху (точки  $O_1$  на осі  $Ox$ ), статичну деформацію  $\delta_{ст}$  пружини під дією вантажу;
- розрахувати еквівалентну жорсткість  $\bar{n}$  пружини, враховуючи вид схеми з'єднання пружних елементів вихідної схеми, і величину статичної деформації  $\delta_{ст}$  пружини, визначити початкові умови  $x_0$  і  $\dot{x}_0$  для вантажу, знайти, враховуючи тип механічної системи, частоти  $\omega_0$  або  $\omega_0^*$  (для дисипативної системи) вільних коливань вантажу, коефіцієнт  $h$  системи;
- визначити, враховуючи тип механічної системи, вид коливального руху вантажу та засіб збудження його коливань, закон руху вантажу у загальному вигляді (для цього використати формули розділу 3.4), розрахувати коефіцієнти та параметри закону руху для конкретної задачі завдання;
- результати розв'язання задач перевірити для моменту часу  $t = 0$  і подати у вигляді відповіді.

Це узагальнена методика розв'язання задач завдання 3. У кожному конкретному випадку етапи методики і перелік визначальних механічних і динамічних характеристик руху для системи і вантажу коректуються з урахуванням умов задачі.

**Завдання по темі**

Варіанти 1-5. Знайти рівняння коливального руху вантажу  $D$  у напрямку осі  $Ox$ . Стержень, який з'єднує вантажі, і брусок, який з'єднує пружини, є невагомими. Рух бруска  $AB$ , який займає в стані спокою горизонтальне положення, вважати поступальним.

Варіант 1. Вантаж  $D$  ( $m_D = 2$  кг) прикріплений до бруска  $AB$ , підвішеному на двох однакових паралельних пружинах, коефіцієнт жорсткості та опору кожної з яких дорівнює  $c = 3$  Н/см,  $b = 6$  Н·с/см. У момент часу  $t = 0$  до

вантажу  $D$ , який знаходиться в стані рівноваги, підвищують вантаж  $E$  ( $m_E = 1$  кг).

Варіант 2. У момент часу  $t = 0$  стержень, який з'єднує вантажі  $D$  ( $m_D = 1$  кг) і  $E$  ( $m_E = 2$  кг) перерізають, а основа починає здійснювати рухи за законом  $\xi = 1,5 \sin 18t$ . Коефіцієнти жорсткості та опору пружин дорівнюють  $c_1 = 12$  Н/см,  $c_2 = 36$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ .

Варіант 3. У момент часу  $t = 0$  до нерухомого вантажу  $D$  ( $m_D = 0,8$  кг) підвішують вантаж,  $E$  ( $m_E = 1,2$  кг), надаючи системі вантажів  $D$  і  $E$  початкову швидкість  $V_0 = 0,2$  м/с, спрямовану вниз. Коефіцієнт жорсткості та опору пружин дорівнює  $c_1 = 10$  Н/см,  $c_2 = 4$  Н/см,  $c_3 = 6$  Н/см,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ .

Варіант 4. Система вантажів  $D$  і  $E$  прикріплена до бруска  $AB$ . Брусок зв'язує систему двох паралельно закріплених пружин. Статична деформація двох однакових з коефіцієнтом опору  $B = 6$  Н/см пружин під спільною дією вантажів  $D$  ( $m_D = 0,5$  кг) і  $E$  ( $m_E = 1,5$  кг) дорівнює  $\delta_{\text{ст}} = 4$  см. У момент часу  $t = 0$  стержень, який з'єднує вантажі, перерізають.

Варіант 5. У момент часу  $t = 0$  до нерухомого вантажу  $D$  ( $m_D = 1,6$  кг), закріпленому на пружині з коефіцієнтом жорсткості  $c = 4$  Н/см та опору  $b = 0$ , підвішують вантаж  $E$  ( $m_E = 2,4$  кг), а основа в точці  $B$  починає здійснювати рух за законом  $\xi = 2 \sin 5t$  (см).

Варіанти 6-10. Знайти рівняння коливального руху вантажу по гладенькій похилій площині у напрямку осі  $Ox$  з моменту дотику вантажу пружини або бруска, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від пружини не відділяється. Брусок, що з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска  $AB$ , який займає в стані спокою перпендикулярне осі  $Ox$  положення, вважати поступальним.

Варіант 6. Здійснивши без початкової швидкості по нахиленій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ) відстань  $S = 0,1$  м, вантаж  $D$  ( $m_D = 4$  кг) з'єднується у моменту часу  $t = 0$  з недеформованими послідовно з'єднаними пружинами, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 48$  Н/см,  $c_2 = 24$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ .

Варіант 7. У момент часу  $t = 0$  вантаж ( $m_D = 2$  кг) приєднують у точці  $A$  без початкової швидкості до системи недеформованих послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 12$  Н/см,

$c_2 = 6 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = 0$ . Одночасно основа у точці  $B$  починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини ( $\alpha = 45^\circ$ ) за законом  $\xi = 0,02 \sin 20t$  (м).

Варіант 8. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 1,5 \text{ кг}$ ) приєднують в точці  $N$  до системи трьох недеформованих паралельно-послідовно закріплених брусом  $AB$  пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 4 \text{ Н/см}$ ,  $c_2 = 6 \text{ Н/см}$ ,  $c_3 = 15 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ . Одночасно вантажу  $D$  надають початкову швидкість  $V_0 = 0,5 \text{ м/с}$  у напрямку позитивного відліку координати  $X$ . Прийняти кут  $\alpha = 45^\circ$ .

Варіант 9. Вантаж  $D$  ( $m_D = 1,2 \text{ кг}$ ), здійснивши без початкової швидкості по нахиленій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ) відстань  $S = 0,2 \text{ м}$ , з'єднується з недеформованою пружиною, яка має коефіцієнти жорсткості та опору  $c = 4,8 \text{ Н/см}$ ,  $b = 0$ . В той же момент часу основа в точці  $B$  починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини за законом  $\xi = 0,03 \sin 12t$  (м).

Варіант 10. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_0 = 1 \text{ кг}$ ) без початкової швидкості приєднується до системи зв'язаних з брусом  $AB$  двох однакових паралельно закріплених недеформованих пружин, які мають кожна коефіцієнти жорсткості та опору  $c = 1,5 \text{ Н/см}$ ,  $b = 4 \text{ Нс/м}$ . Прийняти кут  $\alpha = 60^\circ$ .

Варіанти 11-15. Вантаж  $D$  закріплений на кінці ідеального стержня. Інший кінець стержня закріплений у точці  $E$  на ідеальній шарнірно нерухомій опорі. Система вантаж-стержень може здійснювати малі коливання навколо осі циліндричного шарніра нерухомої опори у площині креслення. Знайти рівняння коливального руху вантажу, вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі  $Ox$ . Брусок  $AB$ , який зв'язує систему двох паралельних пружин, є невагомим. Рух бруска  $AB$ , який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним. У стані рівноваги механічної системи розглядаємий стержень займає вертикальне положення, а пружини не деформовані.

Варіант 11. Вантаж  $D$  ( $m_D = 2,4 \text{ кг}$ ) приєднаний у точці  $F$  з брусом  $AB$ . Коефіцієнти жорсткості та опору зв'язаної брусом системи двох паралельно закріплених пружин  $c_1 = 1 \text{ Н/см}$ ,  $c_2 = 1,4 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = 3 \text{ Нс/м}$ . Перед початком руху вантаж відхиляють на величину  $\lambda = 2 \text{ см}$  у напрямку позитивного відліку координати  $X$  у момент часу  $t = 0$  без початкової швидкості.

Варіант 12. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 3 \text{ кг}$ ) утримується у стані, при якому пружина стиснута на величину  $\lambda = 2 \text{ см}$ , відпускається без

початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості та опору пружини  $c = 9 \text{ Н/см}$ ,  $b = 0$ . Одночасно основа у точці  $B$  починає здійснювати рух за законом  $\xi = 1,2 \sin 8t \text{ (см)}$ .

Варіант 13. Вантажу  $D$  ( $m_D = 1 \text{ кг}$ ) у стані рівноваги, показаному на кресленні, надають початкову швидкість  $V_0 = 0,5 \text{ м/с}$  у напрямку позитивного відліку координати  $X$ . Коефіцієнт жорсткості та опору трьох паралельно закріплених пружин  $c_1 = 12 \text{ Н/см}$ ,  $c_2 = c_3 = c = 3 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ .

Варіант 14. Вантаж  $D$  ( $m_D = 1,5 \text{ кг}$ ) з положення рівноваги, показаному на кресленні, перед початком руху відхиляють на величину  $\lambda = 2,5 \text{ см}$  у напрямку позитивного відліку координати  $X$  і відпускають у момент часу  $t = 0$ , надаючи вантажу початкову швидкість  $V_0 = 0,4 \text{ м/с}$ , спрямовану вправо. Коефіцієнти жорсткості та опору пружин  $c_1 = 4,4 \text{ Н/см}$ ,  $c_2 = 2 \text{ Н/см}$ ,  $c_3 = 8 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ .

Варіант 15. Вантаж  $D$  ( $m_D = 1 \text{ кг}$ ) утримується в стані рівноваги, показаному на кресленні, системою послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 4 \text{ Н/см}$ ,  $c_2 = 12 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = 0$ . У момент часу  $t = 0$  основа в точці  $B$  починає здійснювати рух за законом  $\xi = 1,8 \sin 12t \text{ (см)}$ .

Варіанти 16-20. Знайти рівняння коливального руху вантажу  $D$  у напрямку осі  $Ox$ . Брусок, який з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска  $AB$ , який займає в стані спокою горизонтальне положення, вважати поступальним. Вантажі  $D$ ,  $E$  при сумісному русі один від одного не відділяються.

Варіант 16. У момент часу  $t = 0$  на нерухомий вантаж  $D$  ( $m_D = 10 \text{ кг}$ ) установлюють зверху вантаж  $E$  ( $m_E = 20 \text{ кг}$ ), надаючи системі вантажів  $D$  та  $E$  початкову швидкість  $V_0 = 0,4 \text{ м/с}$  у напрямку позитивного відліку координати  $X$ . Коефіцієнт жорсткості та опору системи зв'язаних брусом  $AB$  трьох паралельно-послідовно закріплених пружин  $c_1 = 200 \text{ Н/см}$ ,  $c_2 = 160 \text{ Н/см}$ ,  $c_3 = 140 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ . Початок відліку осі  $Ox$  сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів  $D$ ,  $E$ .

Варіант 17. Система встановлених на пружині вантажів  $D$  та  $E$  знаходиться у положенні статичної рівноваги. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $E$  знімають з вантажу  $D$ . Кругова частота вільних коливань системи вантажів  $D$  та  $E$   $\omega_0 = 20 \text{ рад/с}$ , відношення мас  $m_D / m_E = 2/3$ . Початок відліку осі  $Ox$  сумістити з положенням статичної рівноваги вантажу  $D$ .

Варіант 18. Вантаж  $D$  встановлений на бруску  $AB$ , який зв'язує систему двох однакових паралельно закріплених пружин. У момент часу  $t = 0$  на нерухомий вантаж  $D$  ( $m_D = 20$  кг) встановлюють зверху вантаж  $E$  ( $m_E = 10$  кг). Статична деформація кожної з пружин з коефіцієнтом опору  $b = 30\sqrt{3}$  Нс/м під дією вантажу  $D$  дорівнює  $\delta_{\text{ст}} = 2$  см. Початок відліку осі  $Ox$  сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів  $D, E$ .

Варіант 19. Система вантажів  $D$  ( $m_D = 15$  кг) та  $E$  ( $m_E = 25$  кг), встановлених на двох послідовно закріплених пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 250$  Н/см,  $c_2 = 375$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ , знаходиться у положенні статичної рівноваги. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $E$  знімають з вантажу  $D$ . Одночасно основа у точці  $B$  починає здійснювати рух за законом  $\xi = 0,05 \sin 30t$  (м).

Варіант 20. У момент часу  $t = 0$  на закріпленій на пружині нерухомий вантаж  $D$  встановлюють зверху вантаж  $E$ , надаючи системі вантажів  $D$  та  $E$  початкову швидкість  $V_0 = 0,3$  м/с у напрямку позитивного відліку координати  $X$ . Кругова частота вільних коливань вантажу  $D$  на пружині  $\omega_0 = 24$  рад/с, відношення мас  $m_D / m_E = 3$ . Початок відліку осі  $Ox$  сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів  $D$  та  $E$ .

Варіант 21-25. Знайти рішення коливального руху вантажу  $D$  по гладенькій нахиленій площині у напрямку осі  $Ox$ . Брусок, який з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска  $AB$ , який займає у стані спокою перпендикулярне осі  $AB$  положення, вважати поступальним.

Варіант 21. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 2$  кг) приєднують у точках  $A$  і  $B$  до вільних кінців системи двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 7$  Н/см,  $c_2 = 3$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ . Одночасно вантажу  $D$  надають початкову швидкість  $V_0 = 0,4$  м/с у напрямку позитивного відліку координати  $X$ . Прийняти кут  $\alpha = 45^\circ$ .

Варіант 22. Вантаж  $D$  у точці  $A$  прикріплений до пружини та утримується на нахиленій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ) у положенні рівноваги. При цьому статична деформація пружини  $\delta_{\text{ст}} = 2$  см. У момент часу  $t = 0$  основа у точці  $B$  починає здійснювати рух за законом  $\xi = 0,01 \sin 10t$  (м).

Варіант 23. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 3$  кг), без початкової швидкості приєднують до бруса  $AB$ , який зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 2$  Н/см,  $c_2 = 4$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 6$  Нс/м. Прийняти кут  $\alpha = 60^\circ$ .

Варіант 24. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 1$  кг) приєднують у точці  $A$  без початкової швидкості до системи двох недеформованих послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 12$  Н/см,  $c_2 = 4$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ . Одночасно основа у точці  $B$  починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини ( $\alpha = 30^\circ$ ) за законом  $\xi = 1,5 \sin 10t$  (см).

Варіант 25. Вантаж  $D$  ( $m_0 = 1,5$  кг) прикріплений до бруса  $AB$ , підвищеному на двох однакових паралельних пружинах. Статична деформація кожної з пружин з коефіцієнтом опору  $b = 3$  Нс/см під дією вантажу  $D$ , який знаходиться на нахиленій площині ( $\alpha = 30^\circ$ ) дорівнює  $\delta_{\text{ст}} = 4,9$  см. У момент часу  $t = 0$  вантажу  $D$ , який знаходиться в положенні рівноваги, надають початкову швидкість  $V_0 = 0,3$  м/с у напрямку від'ємного відліку координати  $X$ .

Варіант 26-30. Знайти рівняння коливального руху вантажу  $D$  у напрямку осі  $Ox$  з моменту дотику ним до плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рух плити вважати поступальним.

Варіант 26. Пролетівши вниз без початкової швидкості відстань  $h = 0,1$  м, вантаж  $D$  ( $m_D = 50$  кг) з'єднується в момент часу  $t = 0$  з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = 600$  Н/см,  $c_2 = 400$  Н/см,  $b_1 = b_2 = 0$ .

Варіант 27. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 40$  кг) встановлюють без початкової швидкості на плиту, яка зв'язує систему двох однакових паралельно закріплених недеформованих пружин, які мають кожна коефіцієнти жорсткості та опору  $c = 130$  Н/см,  $b = 200$  Нс/м.

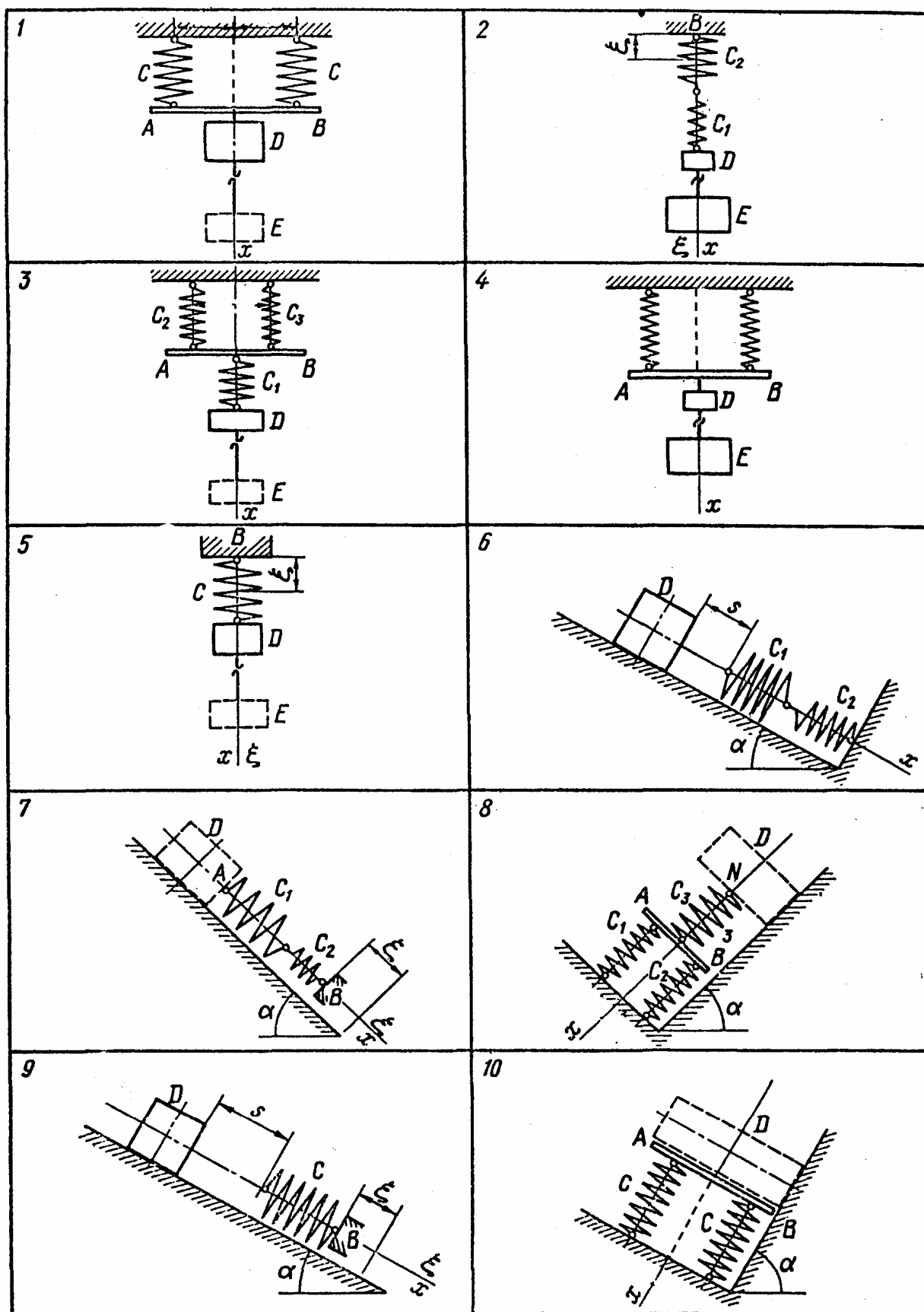
Варіант 28. Вантаж  $D$  без початкової швидкості падає на плиту з висоти  $h = 5$  см. Плита закріплена на пружині, статична деформація якої під дією вантажу дорівнює  $\delta_{\text{ст}} = 1$  см.

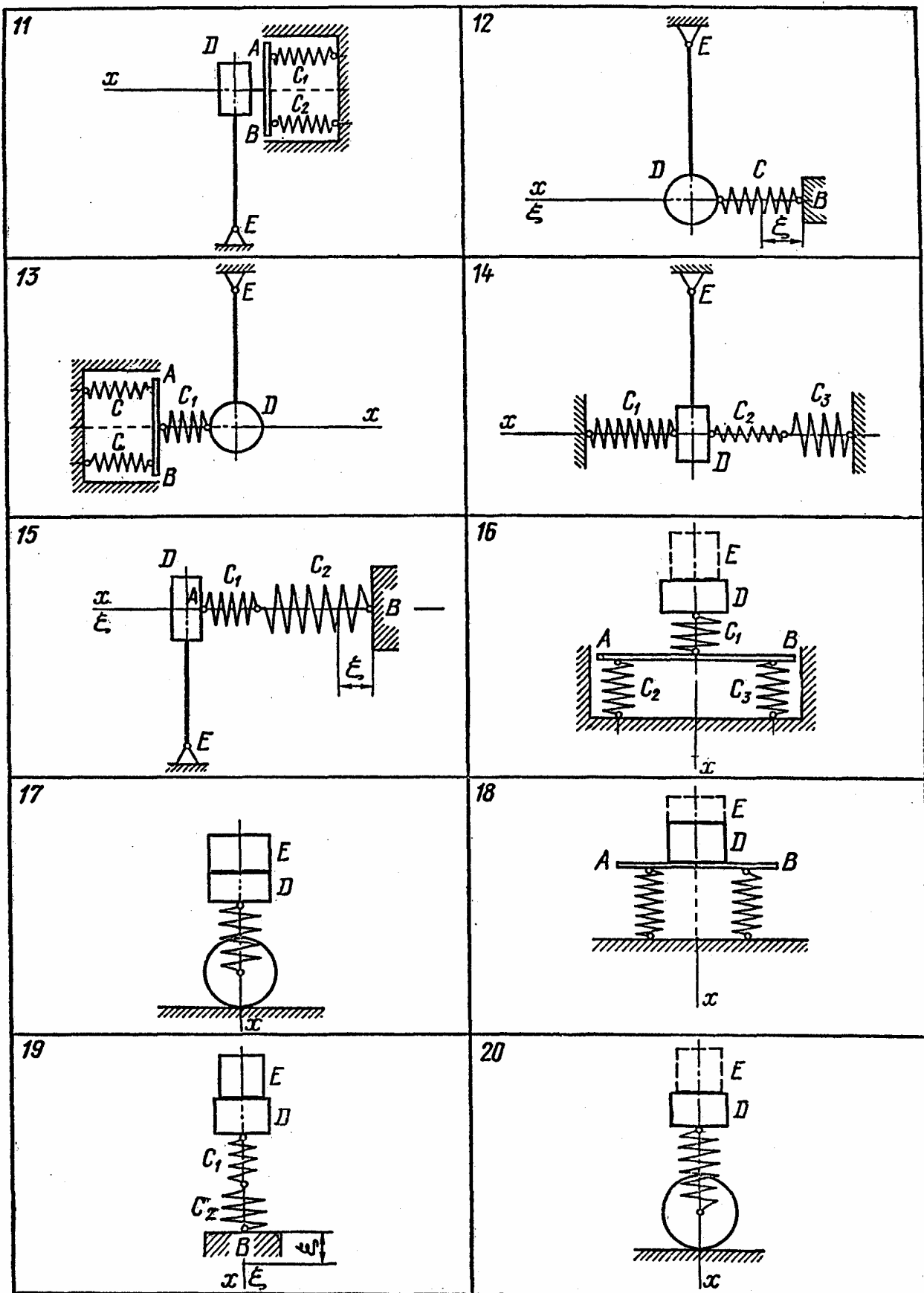
Варіант 29. Плита закріплена на двох однакових паралельних пружинах. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 200$  кг) встановлюють на плиту і приєд-

нують до третьої, розташованої зверху вантажу пружини. Пружини мають коефіцієнти жорсткості та опору  $c_1 = c_2 = 400 \text{ Н/см}$ ,  $c_3 = 200 \text{ Н/см}$ ,  $b_1 = b_2 = 0$ . Одночасно вантажу надають початкову швидкість  $V_0 = 0,6 \text{ м/с}$ , у напрямку позитивного відліку координати  $X$ . На момент початку руху вантажу система трьох пружин знаходиться в недеформованому стані.

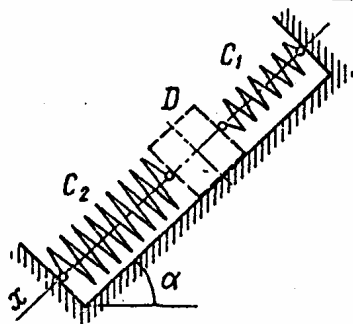
Варіант 30. У момент часу  $t = 0$  вантаж  $D$  ( $m_D = 100 \text{ кг}$ ) встановлюють без початкової швидкості на плиту, яка закріплена на пружині, що має коефіцієнти жорсткості та опору  $b = 0$ . Одночасно основа у точці  $B$  починає здійснювати рух за законом  $\xi = 0,5 \sin 20t$  (см).



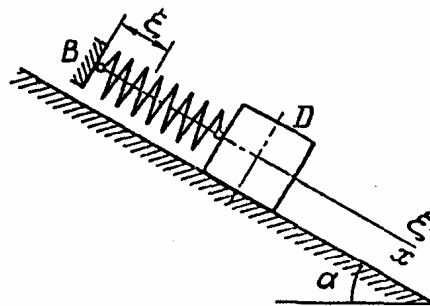




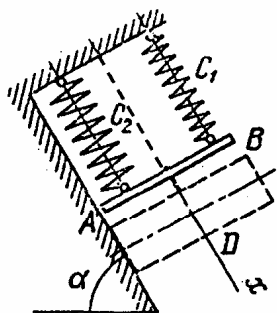
21



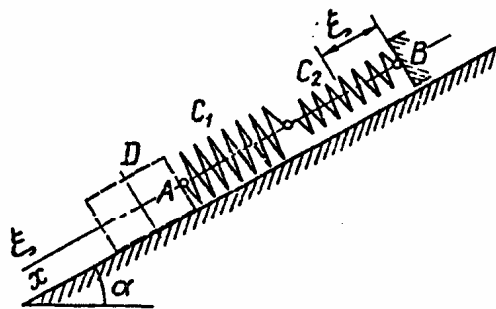
22



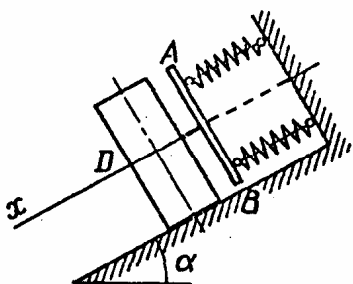
23



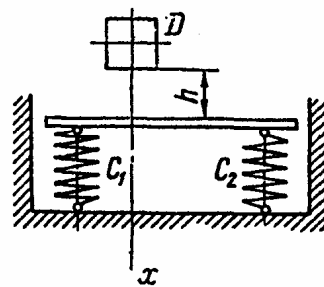
24



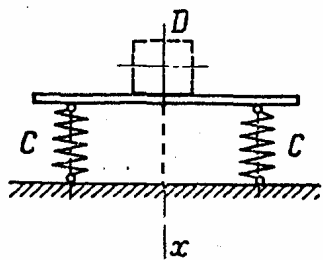
25



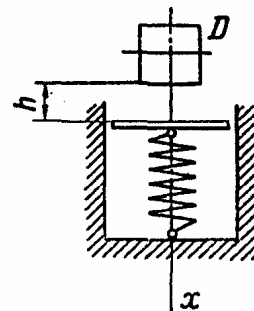
26



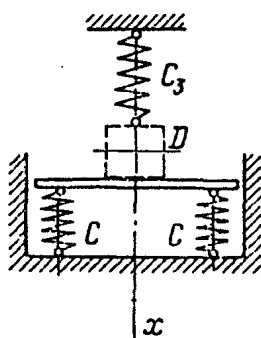
27



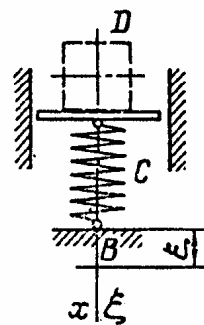
28



29



30



## ЗМІСТ

	Вступ .....	3
1	Статика .....	3
1.1	Система збіжних сил .....	7
1.2	Проекція сили на вісь .....	8
1.3	Моменти сили і пари сил .....	9
1.3.1	Момент сили відносно точки .....	9
1.3.2	Момент сили відносно осі .....	10
1.3.3	Момент пари сил .....	11
1.4	Довільна просторова система сил .....	12
1.5	Довільна плоска система сил .....	15
1.6	Плоска система паралельних сил. Розподілені сили .....	16
1.7	Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл .....	18
1.8	Розрахунок плоскої ферми .....	23
1.8.1	Основні визначення і припущення .....	23
1.8.2	Порядок розрахунку простої ферми .....	24
1.9	Центр ваги твердого тіла .....	28
1.9.1	Центр ваги однорідного твердого тіла .....	29
1.9.2	Центр ваги однорідної пластини .....	30
1.9.3	Центр ваги однорідного стержня .....	30
1.9.4	Способи визначення координат центра ваги .....	31
1.9.5	Центри ваги простіших фігур .....	34
2	Кінематика .....	36
2.1	Кінематика точки .....	36
2.1.1	Векторний спосіб .....	36
2.1.2	Координатний спосіб .....	37
2.1.3	Натуральний спосіб .....	38
2.1.4	Особливі випадки .....	39
2.1.5	Приклад розрахунку .....	40
2.2	Кінематика твердого тіла .....	43
2.2.1	Поступальний рух твердого тіла .....	43
2.2.2	Обертання твердого тіла .....	44
2.2.3	Передача обертального руху .....	46
2.2.4	Плоскопаралельний рух твердого тіла .....	46
2.2.5	Кінематичний аналіз плоского механізму .....	49
2.3	Складний рух точки .....	57
3	Динаміка точки .....	61
3.1	Закони динаміки (Ньютонa) .....	61
3.2	Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки ....	61
3.3	Дві задачі динаміки .....	62
3.4	Прямолінійні коливання матеріальної точки .....	63
3.4.1	Вільні коливання .....	63

3.4.2	Вільні коливання матеріальної точки при наявності сил опору .....	67
3.4.3	Вимушені коливання .....	68
3.4.4	Кінематичне збудження коливань .....	71
3.4.5	Приклади розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки .....	73
3.5	Загальні теореми динаміки точки .....	81
3.5.1	Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки .....	81
3.5.2	Теорема про зміну кінетичної енергії точки .....	81
3.5.3	Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки .....	83
3.6	Принцип Даламбера для матеріальної точки .....	83
4	Динаміка механічної системи і твердого тіла .....	84
4.1	Теорема про рух центра мас механічної системи .....	85
4.2	Теорема про зміну кількості руху механічної системи .....	85
4.3	Теорема про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту) механічної системи .....	86
4.3.1	Диференціальне рівняння обертання .....	87
4.3.2	Моменти інерції механічної системи твердого тіла .....	87
4.4	Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи .....	89
4.5	Принцип Даламбера для механічної системи .....	91
4.6	Елементи аналітичної механіки .....	92
4.6.1	Класифікація в'язей .....	92
4.6.2	Принцип можливих переміщень .....	93
4.6.3	Узагальнені координати, швидкості та узагальнені сили .....	93
4.6.4	Рівняння динаміки системи .....	94
4.7	Удар .....	95
	Список використаних джерел .....	97
	Додаток 1 .....	98
	Додаток 2 .....	102
	Додаток 3 .....	106

*Навчальне видання*

**Шпачук Володимир Петрович**  
**Золотов Михайло Сергійович**  
**Рубаненко Олександр Ігорович**  
**Гарбуз Алла Олегівна**

## ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій і завдання  
для контрольних і самостійних робіт

*(для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямками*

*6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка»,*

*6.050701 «Електротехніка та електротехнології»,*

*6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)»,*

*6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)»,*

*6.170202 «Охорона праці»*

*та слухачів другої вищої освіти спеціальностей:*

*7.05070203 «Електричний транспорт»,*

*7.06010103 «Міське будівництво та господарство»,*

*7.06010101 «Промислове та цивільне будівництво»,*

*7.06010107 «Теплогазопостачання і вентиляція»)*

Відповідальний за випуск *В. П. Шпачук*

*За авторською редакцією*

Комп'ютерне верстання *О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз*

План 2013, поз. 41Л

---

Підп. до друку 23.10.2013  
Друк на різнографі  
Зам. №

Формат 60\*84/16  
Ум. друк. арк. 7,0  
Тираж 50 пр.

Видавець та виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.